

البكالوريا بين يديك

BAC

محمد صابور

# المتتاليات العددية

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد



محمد صابور

# المتتاليات العددية

## 100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

## المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم  
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف  
المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .  
أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه  
المتتاليات العددية يضاف في سلسلة البكالوريا بين يديك .  
يحتوي هذا الكتاب 100 تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا  
مفصلا ومنها المرفقة بالنتائج فقط وأخرى مقترحة للحل كي  
يختبر بها الطالب المعلومات التي اكتسبها في هذا المحور .  
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو  
من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظاتهم البناءة  
لتحسين محتوى هذا الكتيب .  
كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في  
انجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع القانوني : 2007 - 3376

ردمك ISBN : 978-9947-0-1865-1

طبع بمطبعة ع - بن برج الكيفان ( الجزائر )

Scanned by: Mekkaoui Ayoub  
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr



## المتتاليات العددية

### المتتالية العددية

**تعريف :** نسمي متتالية عددية كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$   
نرمز إلى المتتالية العددية بـ :  $(u_n), (v_n), (s_n), \dots$   
الأعداد الحقيقية  $u_0, u_1, \dots, u_n$  تسمى حدود المتتالية العددية  $(u_n)$   
العدد الحقيقي  $u_n$  يسمى الحد العام للمتتالية  $(u_n)$

### التمثيل البياني لمتتالية عددية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0$  والعلاقة التراجعية  
 $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي دالة معرفة على  $\mathbb{N}$ .  
مجموعة النقاط  $(u_n; f(u_n))$  هي التمثيل البياني في المستوى  
المنسوب إلى معلم للمتتالية  $(u_n)$ .

### المتتاليات الحسابية

**تعريف :** نقول بأن المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية حسابية إذا  
و فقط وجد عدد حقيقي  $r$  بحيث أن من أجل كل عدد  
طبيعي  $\mathbb{N}$  فإن :  $u_{n+1} = u_n + r$ .  
يسمى العدد الحقيقي  $r$  أساس المتتالية  $(u_n)$

## الإهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- والدي الكريمين
- رجال التعليم المخلصين في عملهم
- أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في

مهادة البكالوريا

الأستاذ: محمد صابور



## الحد العام لمتتالية حسابية

$(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها العام  $u_n$ .

- إذا كان  $u_0$  هو الحد الأول فإن :  $u_n = u_0 + nr$

- إذا كان  $u_1$  هو الحد الأول فإن :  $u_n = u_1 + (n-1)r$

مجموع حدود متتالية حسابية

$(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  فإن من أجل كل عدد

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 + u_n) \times \left( \frac{n+1}{2} \right) : \mathbb{N} \text{ طبيعي}$$

$S_n$  يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول والحد الأخير.

## الوسط الحسابي

إذا كان  $a, b, c$  ثلاثة حدود متتالية حسابية فإن :

$$a + c = 2b \text{ أي } a + b + c = 3b$$

## المتتاليات الهندسية

تعريف : نقول بأن المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية هندسية إذا

وفقط وجد عدد حقيقي  $q$  بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

## الحد العام لمتتالية هندسية

$(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$ . - إذا كان الحد الأول

هو  $u_0$  فإن عبارة الحد العام هي :  $u_n = u_0 \times q^n$

- إذا كان الحد الأول هو  $u_1$  فإن عبارة الحد العام هي :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

## مجموع حدود متتالية هندسية

$(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$  حيث  $q \neq 1$

فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

## الوسط الهندسي

إذا كان  $a, b, c$  بهذا الترتيب تمثل ثلاثة حدود متتالية

لمتتالية هندسية فإن :  $a \times c = b^2$  أي :  $a \times b \times c = b^3$

## المتتاليات المتقاربة والمتباعدة

تكون المتتالية  $(u_n)$  متقاربة إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

تكون المتتالية  $(u_n)$  متباعدة إذا كانت ليست متقاربة

ملاحظة : - إذا كانت متتالية عددية متزايدة ومحدودة من

الأعلى (majorée) فهي متقاربة .

- إذا كانت متتالية عددية متناقصة ومحدودة من

الأسفل (minorée) فهي متقاربة .

## نهاية متتالية هندسية

$(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$ . - إذا كان  $q > 1$  فإن :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm \infty$  وتكون المتتالية  $(u_n)$  متباعدة .



## تمارين محلولة

### تمرين 1

$u_1, u_2, u_3$  ثلاثة حدود لمتتالية حسابية حيث :  
 $u_1 + u_2 + u_3 = 36$  و  $u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428$

عين  $u_1, u_2, u_3$

### الحل

$$\begin{cases} 3u_2 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases}$$

ومنه  $u_2 = 12$  وبتعويض قيمة  $u_2$  في الجملة السابقة نجد :

$$\begin{cases} u_3 = 24 - u_1 \\ u_1^2 - 24u_1 + 119 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} u_1 + u_3 = 24 \\ u_1 \times u_3 = 119 \end{cases}$$

ومنه  $(u_1 = 17 \text{ و } u_3 = 7)$  أو  $(u_1 = 7 \text{ و } u_3 = 17)$  إذن :  
 $(u_1 = 17, u_2 = 12, u_3 = 7)$  أو  $(u_1 = 7, u_2 = 12, u_3 = 17)$

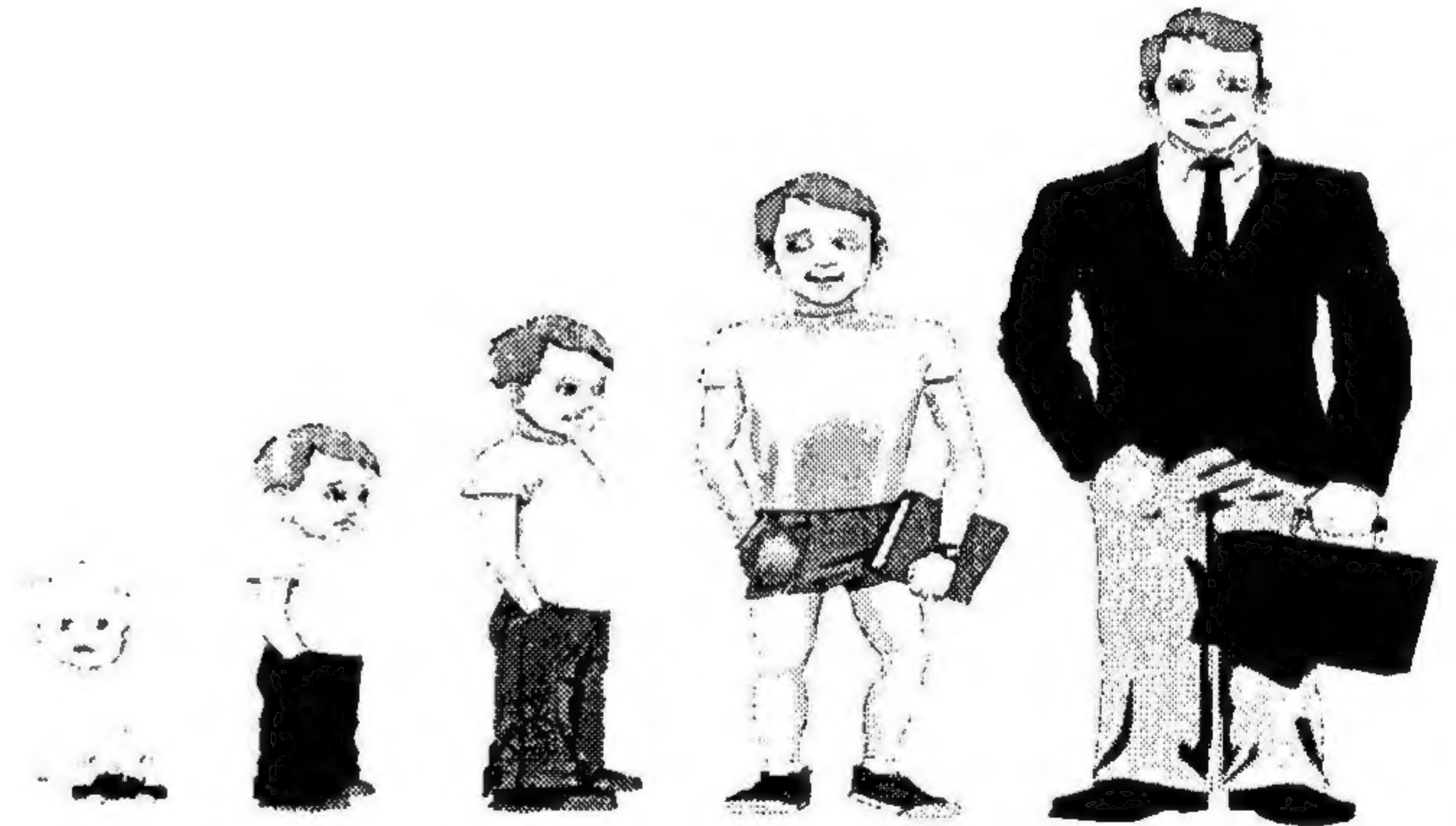
### تمرين 2

$(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  و  $S_n$  هو مجموع  
 $n$  حدها الأولى من هذه المتتالية .

(1) أحسب  $r$  و  $S_{15}$  علما أن :  $u_0 = -3$  و  $u_{14} = 25$

(2) أحسب  $r$  و  $n$  علما أن :  $u_0 = 2$  و  $u_{n-1} = -15$  و  $S_n = -117$

- إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  وتكون المتتالية  
 $(u_n)$  متقاربة . - إذا كان  $q < -1$  تكون  $(u_n)$  متباعدة .





(3) أحسب  $u_0$  و  $r$  علما أن  $u_{n-1} = 39$  و  $n = 20$  و  $S_n = 400$

الحل

$$S_{15} = (u_0 + u_{14}) \times \frac{15}{2} = 22 \times \frac{15}{2} = 165 \quad (1)$$

نعلم أن:  $u_{14} = u_0 + 14r$  ومنه  $25 = -3 + 14r$  ومنه  $r = 2$

$$S_n = u_0 + \dots + u_{n-1} = (u_0 + u_{n-1}) \times \frac{n}{2} = -117 \quad (2)$$

$$\text{ومنه : } -13 \times \frac{n}{2} = -117 \quad \text{ومنه : } n = 117 \times \frac{2}{13} = 18$$

$$r = -1 \quad \text{ومنه : } u_{n-1} = u_{17} = u_0 + 17r = 2 + 17r = -15$$

$$S_n = S_{20} = (u_0 + u_{19}) \times \frac{20}{2} = (u_0 + 39) \times 10 = 400 \quad (3)$$

$$\text{ومنه : } u_0 + 39 = 40 \quad \text{ومنه : } u_0 = 1$$

$$\text{لدينا : } u_{19} = u_0 + 19r = 1 + 19r = 39 \quad \text{ومنه : } r = 2$$

تمرين 3

$c, b, a$  بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها 333 ومجموع مربعاتها 37205. عين الأعداد  $c, b, a$

الحل

$c, b, a$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني :  $2b = a + c$

$$\text{ومنه : } a + b + c = 3b = 333 \quad \text{ومنه : } b = 111$$

$$\text{نعلم أن : } a = b - r \quad \text{و } c = b + r \quad \text{و } a^2 + b^2 + c^2 = 37205$$

$$\text{ومنه : } (b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 3b^2 + 2r^2 = 37205$$

بما أن  $b = 111$  فإن :  $2r^2 = 242$  ومنه :  $r = -11$  أو  $r = 11$

إذا كان  $r = 11$  فإن  $a = b - r = 100$  و  $c = b + r = 122$

إذا كان  $r = -11$  فإن  $a = b - r = 122$  و  $c = b + r = 100$

تمرين 4

عين الأعداد الحقيقية  $c, b, a$  حيث  $a + b + c = \frac{19}{2}$

والأعداد  $2a, b, (c-5)$  بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها يساوي 9

الحل

$2a, b, (c-5)$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني :

$$2b = 2a + (c-5) \quad \text{ومنه } 2b = 2a + (c-5) \quad \text{ومنه } 2a + b + c - 5 = 3b = 9$$

$$\begin{cases} a + c = \frac{13}{2} \\ 2a + c = 11 \end{cases} \quad \text{وبتعويض } b = 3 \text{ في المعادلات السابقة نجد :}$$

$$\text{ومنه : } a = 9/2 \quad \text{و } c = 2$$

إذن الأعداد الحقيقية المطلوبة هي :  $a = 9/2, b = 3, c = 2$

تمرين 5

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة :  $u_{n+1} = 4n + 1$

(1) بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية وعين أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_1$



(2) هل العدد 2001 هو حد من حدود هذه المتتالية ؟

(3) ما قيمة ورتبة الحد الذي نبدأ منه حتى يكون مجموع 20 حدًا متتابعًا من هذه المتتالية مساويًا 1100.

(4) أحسب الجداء :  $2^1 \times 2^5 \times 2^9 \times \dots \times 2^{4n+1}$

### الحل

$$(1) \quad u_{n+1} - u_n = (4n+1) - [4(n-1)+1] = 4 \quad \text{إذن } (u_n)$$

متتالية حسابية حدها الأول  $u_1 = 4 \times 0 + 1 = 1$  وأساسها  $r = 4$

(2) نعلم أن  $u_{n+1} = 4n+1$  ، إذن يكون العدد 2001 حد من حدود

المتتالية  $(u_n)$  إذا وجد عدد طبيعي  $n$  بحيث :  $2001 = 4n+1$

نلاحظ أن  $n = 500$  لأن :  $2001 = 4 \times 500 + 1$  .

إذن 2001 هو حد من حدود المتتالية  $(u_n)$

(3) لنرمز بـ  $u_p$  للحد الأول الذي نبدأ منه ويكون الحد العشرين  $u_{p+19}$

$$\text{نعلم أن } u_p + u_{p+1} + \dots + u_{p+19} = (u_p + u_{p+19}) \times \frac{20}{2} = 1100$$

$$\text{لدينا : } u_p = u_1 + (p-1) \times r = 1 + 4(p-1) = 4p - 3$$

$$u_{p+19} = u_1 + (p+19-1) \times r = 1 + 4(p+18) = 4p + 73$$

$$(u_p + u_{p+19}) \times 10 = 1100 \quad \text{ومنه } 8p + 70 = 110 \quad \text{أي } p = 5$$

إذن الحد الأول الذي نبدأ منه هو  $u_5$  وقيمته هي :

$$u_5 = 1 + 4 \times 4 = 17$$

$$(4) \quad 2^1 \times 2^5 \times \dots \times 2^{4n+1} = 2^{1+5+\dots+(4n+1)} = 2^{(2n+1)(n+1)}$$

لأن  $1 + 5 + \dots + (4n+1)$  يمثل مجموع  $(n+1)$  حد لمتتالية

حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير  $4n+1$

ونعلم أن :  $1 + 5 + \dots + (4n+1) = (2n+1)(n+1)$

### تمرين 6

نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $u_0$

وأساسها  $q$  بحيث :  $(u_6 \neq 0)$  ،  $8u_6 = 125u_9$  . (1) أحسب  $q$

(2) أحسب بدلالة  $u_0$  و  $n$  المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(3) عيّن  $u_0$  بحيث  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 150$  .

(4) نفرض أن  $u_0 = 90$  . عيّن أصغر قيمة العدد الطبيعي  $p$  حيث

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر أو يسوي  $p$  يكون لدينا :

$$n \geq p : u_n \leq 10^{-3}$$

### الحل

$$(1) \quad 8u_6 = 125u_9 \quad \text{ومنه } 8u_0 \times q^6 = 125u_0 \times q^9 \quad \text{ومنه}$$

$$q^3 = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \quad \text{يعني أن : } q = \frac{2}{5}$$

$$(2) \quad S_n = u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3} u_0 \left[ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \right]$$



$$(3) \text{ لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} u_0 \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right] = 150$$

$$\text{ونعلم أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} = 0 \text{ ومنه } \frac{5}{3} u_0 = 150 \text{ ومنه } u_0 = 90$$

$$(4) \quad u_n = u_0 \times q^n = 90 \times \left( \frac{2}{5} \right)^n \quad \text{بإعطاء القيم 1، 2، 3، ... إلى العدد الطبيعي } n \text{ نجد :}$$

$$u_1 = 36, u_2 = 14,4, u_3 = 5,76, \dots, u_{12} = 0,0015$$

$$u_{13} = 0,0006$$

نلاحظ أنه ابتداء من  $u_{13}$  تكون الحدود أقل من  $10^{-3}$  أي:  $u_n \leq 10^{-3}$   
إذن أصغر قيمة العدد الطبيعي  $p$  هي  $p = 13$ .  
يمكن استعمال اللوغارتم للوصول إلى هذه النتيجة.

### تمرين 7

$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  خمسة حدود لمتتالية هندسية. عين هذه الحدود  
علما أن:  $u_3 > 0$  و  $u_1 \times u_5 = 81$  و  $u_2 + u_3 + u_4 = 39$

### الحل

$$u_1 \times u_5 = u_1 \times u_1 \times q^4 = (u_1 \times q^2)^2 = (u_3)^2 = 81$$

$$\text{ومنه } u_3 = 9 \text{ لأن } u_3 > 0. \text{ نعلم أن } u_4 = u_3 \times q \text{ ; } u_2 = \frac{u_3}{q}$$

$$\text{لدينا } u_2 + u_3 + u_4 = 39 \text{ ومنه : } u_2 + u_4 = \frac{9}{q} + 9q = 30$$

$$\text{ومنه : } \frac{3}{q} + 3q = 10 \text{ ومنه : } 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\text{ومنه } q = 3 \text{ أو } q = 1/3. \text{ إذا كان } q = 3 \text{ فإن:}$$

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 9, u_4 = 27, u_5 = 81$$

$$\text{إذا كان } q = 1/3 \text{ فإن:}$$

$$u_1 = 81, u_2 = 27, u_3 = 9, u_4 = 3, u_5 = 1$$

### تمرين 8

$a, b, c$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث  
مجموعها 63 و جداولها 1728. عين هذه الحدود

### الحل

$$a, b, c \text{ ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني : } a \times c = b^2$$

$$\text{ومنه } a \times b \times c = b^3 = 1728 \text{ ومنه : } b^3 = 12^3 \text{ إذن : } b = 12 \text{ وبتعويض } b = 12 \text{ في ما سبق نجد :}$$

$$\begin{cases} a = 51 - c \\ c^2 - 51c + 144 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a \times c = 144 \\ a + c = 51 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } (c = 3, a = 48) \text{ أو } (c = 48, a = 3)$$

إذن الأعداد  $a, b, c$  المطلوبة هي:

$$(c = 3, b = 12, a = 48) \text{ أو } (c = 48, b = 12, a = 3)$$



## تمرين 9

$u_1, u_2, u_3$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية موجبة حيث

$$u_1 + u_2 + u_3 = 7 \text{ و } \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{4} \text{ . أحسب } u_1, u_2, u_3$$

## الحل

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = u_1 (1 + q + q^2) = 7 \quad (*)$$

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{q^2 + q + 1}{u_1 q^2} = \frac{7}{4} \quad (**)$$

بتقسيم (\*) على (\*\*) نجد  $u_1^2 \times q^2 = (u_1 \times q)^2 = (u_2)^2 = 4$  ومنه  $u_2 = 2$  (لأن حدود المتتالية موجبة).

بتعويض  $u_2$  في ما سبق نجد :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 5 \\ \frac{u_1 + u_3}{u_1 \times u_3} = \frac{5}{4} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_1 + u_3 = 5 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 5 - u_3 \\ u_3 = 4 \vee u_3 = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_1 = 5 - u_3 \\ u_3^2 - 5u_3 + 4 = 0 \end{cases}$$

إذا كان  $u_3 = 4$  فإن  $u_1 = 1$  وإذا كان  $u_3 = 1$  فإن  $u_1 = 4$

إذن  $(u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4)$  أو  $(u_1 = 4, u_2 = 2, u_3 = 1)$

## تمرين 10

عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  التي تحقق الشروط الآتية :

- $a, b, c$  بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية
- $a, b, c$  بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية
- $a + b + c = 30$

## الحل

$a, b, c$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني  $a + c = 2b$  ومنه :

$$a + b + c = 3b = 30 \text{ ومنه } b = 10$$

$a, b, c$  حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني  $c^2 = ab$

وبتعويض  $b = 10$  في ما سبق نجد  $a + c = 20$  و  $c^2 = 10a$

$$\text{ومنه : } \left( \frac{c^2}{10} + c = 20 \text{ و } a = \frac{c^2}{10} \right)$$

$$\text{ومنه : } \left( a = \frac{c^2}{10} \text{ و } c^2 + 10c - 200 = 0 \right)$$

ومنه  $c = 10$  أو  $c = -20$  . إذن الأعداد  $a, b, c$  المطلوبة هي :

$$(c = 10, b = 10, a = 10) \text{ أو } (c = -20, b = 10, a = 40)$$

## تمرين 11

$a, b, c$  بهذا الترتيب تمثل حدود متتابعة لمتتالية هندسية حيث :

$$a + b + c = 312 \text{ و } c - a = 192 \text{ . عين } a, b, c$$

## الحل

$$a + b + c = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2) = 312 \quad (*)$$

$$c - a = aq^2 - a = a(q^2 - 1) = 192 \quad (**)$$

$$\text{بتقسيم (*) على (**) نجد : } \frac{q^2 + q + 1}{q^2 - 1} = \frac{312}{192} = \frac{13}{8}$$



ومنه  $5q^2 - 8q - 21 = 0$  ومنه  $8(1 + q^2 + q) = 13(q^2 - 1)$   
ومنه  $q = 3$  أو  $q = -\frac{7}{5}$ . إذا كان  $q = 3$ ، من المعادلة (\*) نجد:

$$c = bq = 216, b = aq = 24 \times 3 = 72, a = \frac{312}{13} = 24$$

$$\text{إذا كان } q = -\frac{7}{5} \text{ من المعادلة (**) نجد: } \frac{24}{25}a = 192$$

$$\text{ومنه } a = 200 \text{ و } b = aq = -280 \text{ و } c = bq = 392.$$

### تمرين 12

$(u_n)$  متتالية هندسية معرفة على  $\mathbb{N}$  أساسها  $q$  حيث  $0 < q < 1$

$$\begin{cases} u_2 \times u_3 \times u_4 = 64 \\ u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \frac{1456}{9} \end{cases} \quad \text{عين الحد العام } u_n \text{ علما أن :}$$

### الحل

$$u_3^2 = u_2 \times u_4 \text{ ومنه } u_2 \times u_3 \times u_4 = u_3^3 = 4^3 \text{ ومنه } u_3 = 4$$

نعلم أن :  $u_2 = u_3 \div q$  و  $u_4 = u_3 \times q$

$$\text{ومنه : } u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = u_3^2 \left( \frac{1}{q^2} + q^2 + 1 \right) = \frac{1456}{9}$$

$$\text{ومنه : } 16 \left( \frac{q^4 + q^2 + 1}{q^2} \right) = \frac{1456}{9}$$

$$\frac{q^4 + q^2 + 1}{q^2} = \frac{91}{9} \text{ ومنه : } 9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\text{بوضع } q^2 = x \text{ نحصل على المعادلة : } 9x^2 - 82x + 9 = 0$$

وحلولها هي :  $x_1 = 9$  أو  $x_2 = 1/9$

$$\text{بما أن } 0 < q < 1 \text{ و } q^2 = x \text{ فإن } q = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{لدينا : } u_3 = u_0 q^3 = u_0 \times \left( \frac{1}{3} \right)^3 = 4 \text{ ومنه : } u_0 = 4 \times 27 = 108$$

$$\text{إذن : } u_n = u_0 \times q^n = 108 \times \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

### تمرين 13

$$\begin{cases} u_0 \times u_2 = 3u_1 \\ u_0 + u_1 + u_2 = 13 \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية معرفة على } \mathbb{N} \text{ حيث :}$$

$$(1) \text{ أحسب } u_2, u_1, u_0$$

$$(2) \text{ أحسب الحد العام } u_n \text{ بدلالة } n \text{ للمتتالية الهندسية المتزايدة .}$$

### الحل

$$\text{نعلم أن } u_0 \times u_2 = u_1^2 \text{ (الوسط الهندسي) ولدينا } u_0 \times u_2 = 3u_1$$

$$\text{ومنه : } u_1^2 = 3u_1 \text{ ومنه : } u_1 = 3 \text{ و } u_0 + u_2 = 10$$



نعلم أن  $u_0 = \frac{u_1}{q}$  و  $u_2 = u_1 q$  ومنه :  $\frac{3}{q} + 3q = 10$

ومنه :  $3q^2 - 10q + 3 = 0$  ومنه :  $q = 3$  أو  $q = 1/3$ .

إذا كان  $q = 3$  فإن :  $u_0 = u_1 \div q = 1, u_1 = 3, u_2 = u_1 q = 9$

إذا كان  $q = 1/3$  فإن :  $u_0 = u_1 \div q = 9, u_1 = 3, u_2 = 1$

إذا كان  $q = 3$  فالمتتالية  $(u_n)$  متزايدة ويكون حدها العام :

$$u_n = u_0 \times q^n = 3^n$$

### تمرين 14

عين العددين الحقيقيين الموجبين  $b, a$  حيث :

-  $a, (6a - b), (a + 2b)$  هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية.

-  $a, (b + 1), (4b - a)$  هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

### الحل

$a, (6a - b), (a + 2b)$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني أن :

$$a + (a + 2b) = 2(6a - b) \quad \text{ومنه : } 5a = 2b (*)$$

$a, (b + 1), (4b - a)$  حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني أن :

$$(b + 1)^2 = a(4b - a) (**)$$

من المعادلة (\*) نجد :  $b = \frac{5a}{2}$  وبالتعويض في (\*\*) وبعد النشر

$$11a^2 - 20a - 4 = 0 \quad \text{والتبسيط للمعادلة نجد :}$$

وجذور هذه المعادلة هي :  $a = 2$  أو  $a = -\frac{2}{11}$  (مرفوض)

$$\text{إذن : } a = 2 \quad \text{و} \quad b = \frac{5a}{2} = 5$$

### تمرين 15

$(u_n)$  متتالية هندسية موجبة ومتزايدة ، حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q$ .

(1) عين الحدود  $u_1, u_2, u_3, u_4$  علما أن :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 64 \quad \text{و} \quad u_2 + u_3 = 6$$

(2) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$ . هل  $(u_n)$  متقاربة ؟

### الحل

(1)  $u_1, u_2, u_3, u_4$  حدود متتالية هندسية فإن  $u_1 \times u_4 = u_2 \times u_3$

$$\text{ومنه : } u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = (u_2 \times u_3)^2 = 64 = 8^2$$

ومنه  $u_2 \times u_3 = 8$  (لأن  $u_2 > 0$  و  $u_3 > 0$ ). لدينا :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 = 6 \\ u_2 \times u_3 = 8 \end{cases} \quad \text{ومنه : } \begin{cases} u_3 = 6 - u_2 \\ u_2^2 - 6u_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

ومنه :  $u_2 = 2$  أو  $u_2 = 4$  و  $u_3 = 6 - u_2$ .

إذا كان  $u_2 = 2$  فإن  $u_3 = 6 - u_2 = 4$   $(u_n)$  متزايدة .

إذا كان  $u_2 = 4$  فإن  $u_3 = 6 - 4 = 2$   $(u_n)$  متناقصة (مرفوضة)

ويكون  $q$  أساس المتتالية  $(u_n)$  المتزايدة يساوي :  $q = u_3 \div u_2 = 2$

إذن :  $u_1 = u_2 \div q = 1$  و  $u_4 = u_3 \times q = 8$



(2)  $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$  لدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  إذن  $(u_n)$  متباعدة

### تمرين 16

(1) أثبت أنه إذا كان  $x, y, z$  ثلاثة أعداد حقيقية وحدود متتالية

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)(x - y + z)$$

(2) عين ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية علما أن مجموعها 42 و مجموع مربعاتها 1092 .

### الحل

(1)  $x, y, z$  حدود متتالية لمتتالية هندسية يعني  $y^2 = x \times z$

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + 2xz - y^2 + z^2 =$$

$$x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(2) لدينا  $x + y + z = 42$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = 1092$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)(x - y + z) = 42(x - y + z)$$

ومنه  $x - y + z = 1092 \div 42 = 26$  ومنه :

$$(x + y + z) - (x - y + z) = 2y = 16$$

ومنه :  $y = 8$  . لدينا :  $x + y + z = 42$  ومنه :  $x + z = 34$

ونعلم أن  $x = \frac{y}{q}$  و  $z = yq$  . وبتعويض في المعادلة السابقة

$$x + z = \frac{y}{q} + yq = 8 \left( \frac{1}{q} + q \right) = 8 \left( \frac{q^2 + 1}{q} \right) = 34 \quad \text{نجد :}$$

$$\text{ومنه : } \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{17}{4} \quad \text{ومنه : } 4q^2 - 17q + 4 = 0$$

ومنه :  $q = 4$  أو  $q = 1/4$

إذا كان  $q = 4$  فإن  $x = 2, y = 8, z = 32$

إذا كان  $q = \frac{1}{4}$  فإن  $x = 32, y = 8, z = 2$

### تمرين 17

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

الخمس الحدود الأولى تشكل متتالية حسابية حدها الأول  $u_1 = 1$

وأساسها  $r = 1/2$  وبداية من الحد الرابع حدود المتتالية  $(u_n)$

تشكل متتالية هندسية أساسها  $6/5$

(1) أحسب  $u_2, u_3, u_4$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$

(2- أ) أحسب  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  . ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### الحل

$$(1) \quad u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = 2, \quad u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ومن أجل  $n \geq 4$  فإن :

$$u_n = u_4 \times q^{n-4} = \frac{5}{2} \times \left( \frac{6}{5} \right)^{n-4} = \frac{5}{2} \times \frac{6}{5} \times \left( \frac{6}{5} \right)^{n-5} = 3 \left( \frac{6}{5} \right)^{n-5}$$

$$S_n = (u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + \dots + u_n) = \frac{9}{2} + (u_4 + \dots + u_n)$$



( $u_4 + \dots + u_n$ ) تمثل مجموع ( $n-3$ ) حدا لمتتالية هندسية حدها الأول  $u_4 = 5/2$  وأساسها  $q = 6/5$  ومنه

$$u_4 + \dots + u_n = u_4 \times \frac{q^{n-3} - 1}{q - 1} = \frac{25}{2} \times \left[ \left( \frac{6}{5} \right)^{n-3} - 1 \right]$$

$$S_n = \frac{9}{2} + \frac{25}{2} \times \left[ \left( \frac{6}{5} \right)^{n-3} - 1 \right] : \text{ ومنه :}$$

$$(ب) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad (\text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{6}{5} \right)^{n-3} = +\infty).$$

### تمرين 18

( $u_n$ ) متتالية هندسية متناقصة معرفة على  $N^*$  أساسها  $q$  حيث

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = \frac{125}{8} \quad \text{و} \quad \left( u_1 - \frac{5}{12} \right), u_2, u_3 \text{ تمثل حدود متتالية}$$

لمتتالية حسابية. (1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  والأساس  $q$  للمتتالية ( $u_n$ )

(2) أحسب المجموع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(3) أحسب الجداء  $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

### الحل

(1) بما أن ( $u_n$ ) متتالية هندسية فإن :  $u_1 \times u_3 = (u_2)^2$  ومنه:

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = (u_2)^3 = \frac{125}{8} = \left( \frac{5}{2} \right)^3 \quad \text{ومنه : } u_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ومنه : } (*) \quad u_1 \times u_3 = \frac{125}{8} \div \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

$u_3, u_2, \left( u_1 - \frac{5}{12} \right)$  حدود متتالية حسابية فإن

$$u_1 + u_3 = \frac{65}{12} \quad (**) \quad \text{ومنه :} \quad \left( u_1 - \frac{5}{12} \right) + u_3 = 2u_2 = 5$$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = \frac{65}{12} \\ u_1 \times u_3 = \frac{25}{4} \end{cases} \quad \text{من } (*) \text{ و } (**) \text{ نجد :}$$

ومنه :

$$u_3 = \frac{65}{12} - u_1 \quad \text{و} \quad u_1^2 - \frac{65}{12}u_1 + \frac{25}{4} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\left( u_3 = \frac{5}{3} \text{ و } u_1 = \frac{15}{4} \right) \quad \text{أو} \quad \left( u_3 = \frac{15}{4} \text{ و } u_1 = \frac{5}{3} \right)$$

وبما أن ( $u_n$ ) متتالية متناقصة فيكون  $u_1 > u_3$

$$\text{إذن : } u_1 = \frac{15}{4}, \quad u_2 = \frac{5}{2}, \quad u_3 = \frac{5}{3}$$

ويكون أساس المتتالية ( $u_n$ ) هو  $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{3}$ .

$$S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - (2/3)^n}{1 - 2/3} = \frac{45}{4} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right] \quad (2)$$



II. نفرض أن الحد الذي نبدأ منه هو  $v_p$  ومنه مجموع العشرة الحدود  $p = 75$  ومنه  $u_p = u_1 + (p-1)r = 6 + (p-1) \times 4 = 302$

المتتابعة التي حدها الأول  $v_p$  يساوي  $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$

لدينا حسب المعطيات  $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1023}{512}$  و  $q = \frac{1}{2}$

ومنه :  $v_p \times \left( \frac{2^{10}-1}{2^9} \right) = v_p \times \frac{1023}{512} = \frac{1023}{512}$

ومنه :  $v_p = 1$

نعلم أن  $v_p = 16 \times \left( \frac{1}{2} \right)^p = 1$  ومنه  $\left( \frac{1}{2} \right)^p = \frac{1}{16}$  ومنه  $p = 4$  إذن الحد الذي نبدأ منه هو  $v_4$  ورتبته هي الرتبة الخامسة.

## تمرين 20

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها العام  $u_n = \frac{2-n}{2}$ .

(1) برهن أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

(2) لتكن المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $v_n = e^{u_n}$ .

برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية متقاربة.

(3- أ) أحسب المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ب) أحسب الجداء  $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_1 \times u_1 q \times u_1 q^2 \times \dots \times u_1 q^{n-1} =$$

$$(3) = (u_1)^n \times q^{1+2+\dots+n-1} = \left( \frac{15}{4} \right)^n \times \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

لأن  $1+2+\dots+(n-1)$  يمثل مجموع  $1$  إلى  $(n-1)$  حد لمتتالية حسابية حدها الأول  $1$  وحدها الأخير  $(n-1)$ .

## تمرين 19

I.  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_1 = 6$  ومجموع حدودها الستة الأولى ينقص عن مجموع حدودها الثلاثة التي تليها بـ 6.

(1) عين أساس المتتالية  $(u_n)$ . (2) عين رتبة الحد الذي قيمته 302

II.  $(v_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = 16$  وأساسها  $q = \frac{1}{2}$ .

نريد حساب مجموع 10 حدود متتابعة للمتتالية  $(v_n)$  بحيث يكون

مجموعها يساوي  $\frac{1023}{512}$ . ما هي رتبة الحد الذي نبدأ منه ؟

## الحل

$$(u_7 + u_8 + u_9) - (u_1 + u_2 + \dots + u_6) =$$

$$(3u_1 + 21r) - (6u_1 + 15r) = -3u_1 + 6r = 6$$

نعلم أن  $u_1 = 6$  ومنه :  $-18 + 6r = 6$  ومنه :  $r = 4$

(2) لتكن  $p$  رتبة الحد الذي قيمته 302 ومنه :



التراجعية  $2nu_{n+1} = (n+1)u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ .

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم نضع  $v_n = \frac{u_n}{n}$

(1) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

(2-أ) أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ . (ب) برهن أن  $(u_n)$  متقاربة

(3) أحسب بدلالة  $n$  :  $\alpha_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

### الحل

(1) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا تحقق  $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} \times v_n$$

إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_1 = \frac{1}{2}$

(2-أ) بما أن  $(v_n)$  متتالية هندسية فيكون حدها العام :  $v_n = v_1 q^{n-1}$

ومنه  $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$  لدينا  $v_n = \frac{u_n}{n}$  ومنه  $u_n = nv_n$

إذن  $u_n = n \times \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$  (ب) بما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

إذن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وتتقارب إلى 0

(3)

$$\alpha_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = v_1 \times v_1 q \times v_1 q^2 \times \dots \times v_1 q^{n-1} =$$

### الحل

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-(n+1)}{2} - \frac{2-n}{2} = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

ومنه  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 1$  وأساسها  $r = -\frac{1}{2}$

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{\frac{2-(n+1)}{2}} = e^{\frac{2-n}{2} - \frac{1}{2}} = e^{\frac{2-n}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \times v_n \quad (2)$$

إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = e^{-\frac{1}{2}}$ .

بما أن  $-1 < q < 1$  فالمتتالية  $(v_n)$  متقاربة وتتقارب إلى 0

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 + u_n) \times \frac{n+1}{2} = \quad (3)$$

$$= (u_0 + u_0 + nr) \times \left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(2 - \frac{1}{2}n\right) \times \frac{n+1}{2}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = v_0 \times (v_0 q) \times \dots \times (v_0 q^n) \quad (ب)$$

$$= (v_0)^{n+1} \times q^{1+\dots+n} = e^{n+1} \times \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{(لأن } v_0 = e^{u_0} = e \text{ و } 1+2+3+\dots+n = (n+1) \times \frac{n}{2} \text{)}$$

### تمرين 21

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بحدها الأول  $u_1 = \frac{1}{2}$  والعلاقة



$$= v_1^n \times q^{1+2+\dots+(n-1)} = \frac{1}{2^n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{n(n-1)}{2}}$$

## تمرين 22

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_n = \alpha u_{n-1} + 2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

1- أ) عين  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة .

ب) ما طبيعة المتتالية  $(u_n)$  إذا كان  $\alpha = 1$  .

2) نفرض أن  $\alpha \neq -1$  و  $\alpha \neq 1$  ونعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$

$$v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ :}$$

أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$

ب) عين قيم  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  متقاربة ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

## الحل

1- أ) تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة إذا تحقق لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n$

وحسب المعطيات لدينا  $u_0 = 1$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  ثابتة لما :

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = 1 \text{ ومنه : } \alpha \times 1 + 2 = 1 \text{ ومنه : } \alpha = -1$$

ب) إذا كان  $\alpha = 1$  فإن  $u_n = u_{n-1} + 2$  ومنه :  $u_n - u_{n-1} = 2$

إن المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية حسابية أساسها 2.

2- أ) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا كان :  $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1-\alpha} =$$

$$= \alpha u_n + \frac{2(1-\alpha)-2}{1-\alpha} = \alpha \left( u_n - \frac{2}{1-\alpha} \right) = \alpha \times v_n$$

إن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = 1 - \frac{2}{1-\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

وأساسها  $q = \alpha$  . ب) تكون المتتالية الهندسية  $(v_n)$  متقاربة إذا كان

أساسها  $\alpha \in ]-1; 1[$  وفي هذه الحالة تكون  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  .

## تمرين 23

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل

كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  .

1) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  متزايدة تماماً .

2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n \leq 3$

3) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

## الحل

1)  $(u_n)$  متتالية متزايدة يعني لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n > 0$

لنبرهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة نستعمل البرهان بالتراجع .

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{N}$  الخاصية  $p$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$



$$p(n): u_{n+1} - u_n > 0 : \text{بـ}$$

من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_1 - u_0 = \sqrt{6} > 0$  . إذن  $p(0)$  محققة .

لنفرض أن  $p(n)$  صحيحة أي  $u_{n+1} - u_n > 0$  ولنبرهن صحة

$$p(n+1) \text{ أي } u_{n+2} - u_{n+1} > 0 .$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + 6} - \sqrt{u_n + 6} =$$

$$= \frac{(u_{n+1} + 6) - (u_n + 6)}{\sqrt{u_{n+1} + 6} + \sqrt{u_n + 6}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{u_{n+1} + 6} + \sqrt{u_n + 6}}$$

لدينا  $u_{n+1} - u_n > 0$  حسب فرضية البرهان بالتراجع ومنه

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{u_{n+1} + 6} + \sqrt{u_n + 6}} > 0 \text{ ومنه } u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

إذن  $p(n+1)$  صحيحة ، ومنه الخاصية  $p(n)$  صحيحة من أجل

كل عدد طبيعي  $n$  ( $u_{n+1} - u_n > 0$ ) ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

(2) لكي نبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n \leq 3$  نستعمل البرهان بالتراجع .

لتكن  $p(n)$  خاصية معرفة في  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n \leq 3$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

من أجل  $n = 0$  فإن  $u_0 = 0$  ومنه  $p(0)$  صحيحة

لنفرض أن  $p(n)$  صحيحة أي  $u_n \leq 3$  ولنبرهن على صحة

$$p(n+1) \text{ أي } u_{n+1} \leq 3 . \text{ لدينا حسب الفرضية : } u_n \leq 3$$

$$\text{ومنه } u_n + 6 \leq 3 + 6 \text{ ومنه } \sqrt{u_n + 6} \leq 3 \text{ ومنه } u_{n+1} \leq 3$$

إذن  $p(n+1)$  صحيحة ، ومنه  $p(n)$  صحيحة من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ أي : } u_n \leq 3$$

(3) بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

## تمرين 24

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بـ :

(1) عين  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

(2) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :

$$v_n = u_n + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي . عين قيمة } \alpha \text{ حتى تكون}$$

المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$  .

(3) في ما يأتي نأخذ  $k = -3$  و  $\alpha = 4$  .

(أ) احسب  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  . (ب) أدرس تغيرات المتتالية  $(v_n)$

(ج) احسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$  . (د) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

## الحل

$$(u_n) \text{ ثابتة يعني } u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1} = \alpha$$

$$\text{لدينا } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \text{ ومنه : } \alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{4} \text{ ومنه } \alpha = 3$$

(2) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا تحقق :  $v_{n+1} = v_n \times q$



## تمرين 25

نعتبر المتتالية الحقيقية  $(u_n)$  المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  و  $u_1 = 2$

وبالعلاقة التراجعية:  $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) برهن بأن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$ .

(2-أ) أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$ . (ب) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة

(3-أ) أحسب المجموع:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

(ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

## الحل

(1) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا تحقق  $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = u_1 - u_0 = 1$  وأساسها  $\frac{1}{2}$

$$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n} \quad (2-أ)$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + k = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} + k = \frac{1}{4}(u_n + k) + \frac{3k}{4} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{4}v_n + \left(\frac{3}{4}k + \frac{9}{4}\right)$$

تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا كان:  $\frac{3k}{4} + \frac{9}{4} = 0$  ومنه  $k = -3$

(3-أ) حسب السؤال السابق إذا كان  $k = -3$  فتكون المتتالية  $(v_n)$

هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$  وحدها الأول  $v_0 = \alpha - 3 = 4 - 3 = 1$

$$\text{ومنه: } v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ و } u_n = v_n + 3 = \frac{1}{4^n} + 3$$

$$(ب) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4^n} = \frac{1-4}{4^{n+1}} = -\frac{3}{4^{n+1}} < 0$$

إذن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة.

$$(ج) \quad S_n = u_0 + \dots + u_{n-1} = (v_0 + 3) + \dots + (v_{n-1} + 3) = \\ = (v_0 + \dots + v_{n-1}) + 3n =$$

$$= v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} + 3n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + 3n$$

$$(د) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad (\text{لأن } \frac{1}{4^n} \rightarrow 0 \text{ و } 3n \rightarrow +\infty \text{ لما } n \rightarrow +\infty)$$



## الحل

(1)  $p(n)$  خاصية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ:  $u_n \leq 3$

لدينا  $u_1 = -1 \leq 3$  ومنه  $p(1)$  صحيحة. لنفرض أن

$p(n)$  محققة أي  $u_n \leq 3$  ولنبرهن على صحة  $p(n+1)$  أي

$u_{n+1} \leq 3$ . لدينا حسب الفرضية:  $u_n \leq 3$

ومنه:  $\frac{n}{2(n+1)} u_n \leq \frac{3n}{2(n+1)}$  ومنه:

ومنه:  $\frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \leq \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$u_{n+1} \leq \frac{6(n+1)}{2(n+1)}$  ومنه  $u_{n+1} \leq 3$ . بما أن  $p(n+1)$  محققة

فإن  $p(n)$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أي:  $u_n \leq 3$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n = \quad (2)$$

$$= \left( \frac{n}{2(n+1)} - 1 \right) u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = -\frac{n+2}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= -\frac{n+2}{2(n+1)} \times (u_n - 3) > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \quad (ب)$$

إذن  $(v_n)$  هي متتالية متناقصة. 3-1) لدينا:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

(ب) نعلم أن:  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ولدينا:  $S_n = v_0 + \dots + v_{n-1}$

$$S_n = (u_1 - u_0) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0 = u_n - 1$$

ومنه:  $u_n = S_n + 1 = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$  وتكون  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

## تمرين 26

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ:

$$u_1 = -1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} \times u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

(1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن:  $u_n \leq 3$

(2) أدرس تغيرات المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بـ:  $v_n = n(3 - u_n)$ .

- برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية وعين حدها الأول وأساسها.

(4) عبر عن  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$



$$(\text{لأن } -\frac{n+2}{2(n+1)} < 0 \text{ و } u_n - 3 \leq 0)$$

بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فالمتتالية  $(u_n)$  متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة

(3) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا تحقق  $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1}) =$$

$$= (n+1) \left[ 3 - \frac{n}{2(n+1)} u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right] =$$

$$= 3(n+1) - \frac{n}{2} u_n - \frac{3(n+2)}{2} = \frac{6(n+1) - 3(n+2)}{2} - \frac{n}{2} u_n =$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{n}{2} u_n = \frac{1}{2} n (3 - u_n) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن المتتالية  $(v_n)$  هندسية حدها الأول  $v_1 = 4$  وأساسها  $\frac{1}{2}$

$$v_n = v_1 q^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-3}} \quad (4)$$

$$\text{لدينا : } v_n = n(3 - u_n) \text{ ومنه : } u_n = 3 - \frac{v_n}{n} = 3 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^{n-3}}$$

### تمرين 27

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :

$$\begin{cases} 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0 \\ u_0 = 1, \quad u_1 = 3 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ  $v_n = u_{n+1} - u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$   
(1) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$(2) \text{ أ) أحسب } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ب) أكتب  $S_n$  بدلالة  $u_n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج) برهن بأن المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية رتيبة.

### الحل

(1) تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا تحقق  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5}{3} u_{n+1} - \frac{2}{3} u_n - u_{n+1} = \frac{2}{3} u_{n+1} - \frac{2}{3} u_n =$$

$$= \frac{2}{3} (u_{n+1} - u_n) = \frac{2}{3} v_n$$

إذن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = 2$  وأساسها  $\frac{2}{3}$ .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] \quad (2)$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + \dots + (u_{n+1} - u_n) \quad \text{ب)}$$



$$\pi_n = u_0 + 4u_1 + 4^2 u_2 + \dots + 4^n u_n$$

$$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)} \quad \text{د) اثبت ان :}$$

### الحل

(1) تكون المتتالية  $(v_n)$  ثابتة لما جميع حدودها متساوية أي :

$$v_0 = v_1 = \dots = v_n = v_{n+1} = \alpha$$

لدينا :  $4v_{n+1} = v_n + 9$  ومنه  $4\alpha = \alpha + 9$  ومنه  $\alpha = 3$

$$(2) \text{ لدينا : } 4v_{n+1} = v_n + 9 \text{ ومنه : } v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4}$$

$$v_1 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}, \quad v_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{9}{4} = \frac{49}{16}$$

$$v_3 = \frac{1}{4}v_2 + \frac{9}{4} = \frac{193}{64}$$

3- ا) تكون  $(u_n)$  متتالية هندسية إذا تحقق  $u_{n+1} = u_n \times q$

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3 = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} - 3 = \frac{1}{4}(v_n - 3) = \frac{1}{4}u_n$$

إذن  $(u_n)$  هي متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{4}$ .

$$\text{ب) } u_n = u_0 \times q^n = (v_0 - 3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

$$S_n = u_n - u_0 = u_n - 1$$

لدينا  $S_n = u_n - 1$  ومنه :  $u_n = S_n + 1 = 6 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 1$  - ج -

$$u_{n+1} - u_n = 6 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 6 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] =$$

$$= 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

بما أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة (رتيبة).

### تمرين 28

لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$v_0 = \alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : 4v_{n+1} = v_n + 9$$

(1) عين قيمة العدد  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  ثابتة.

نفرض في كل ما يلي  $\alpha = 4$ . (2) أحسب  $v_3, v_2, v_1$

(3) نعرف المتتالية  $(u_n)$  كما يلي :  $u_n = v_n - 3$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

أ) أثبت أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب) أكتب  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ج) أحسب المجموعين :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



$$= q^{1+\dots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$$

لأن  $u_0 = 1$  و  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### تمرين 29

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

(1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  . لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :

$$v_n = u_n + \alpha n + \beta \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ حيث } \alpha, \beta \text{ عدنان}$$

(2) عين العددين  $\alpha, \beta$  بحيث تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$

(3) نفرض أن في ما يأتي  $\alpha = 6$  و  $\beta = -23$  .

(أ) أكتب عبارة  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

$$\text{(ب) نضع : } \pi_n = u_0 + \dots + u_n, \quad S_n = v_0 + \dots + v_n$$

أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $\pi_n$  .

### الحل

$$(1) \quad u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}, \quad u_2 = \frac{19}{9}, \quad u_3 = \frac{-45}{27}$$

$$\text{لدينا : } u_n = v_n - 3 \text{ ومنه : } v_n = u_n + 3 = \frac{1}{4^n} + 3$$

$$S_n = v_0 + \dots + v_n = (u_0 + 3) + \dots + (u_n + 3) = \quad (ج)$$

$$= (u_0 + \dots + u_n) + 3(n+1)$$

وبما أن  $u_0 + \dots + u_n$  يمثل مجموع  $(n+1)$  حداً لمتتالية هندسية

حدها الأول  $u_0 = 1$  وأساسها  $q = \frac{1}{4}$  فإن :

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$\text{ومنه : } S_n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + 3(n+1)$$

$$\begin{aligned} \pi_n &= u_0 + 4u_1 + 4^2u_2 + \dots + 4^nu_n = \\ &= u_0 + 4u_0q + 4^2u_0q^2 + \dots + 4^nu_0q^n = \\ &= u_0 \left[ 1 + 4q + (4q)^2 + \dots + (4q)^n \right] = \\ &= u_0 (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = (n+1)u_0 \end{aligned}$$

$$(\text{لأن } u_0 = 1 \text{ و } 4q = 4 \times \frac{1}{4} = 1)$$

$$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = u_0 \times (u_0q) \times \dots \times (u_0q^n) = \quad (د)$$



$$v_n = u_n + 6n - 23 : \text{لدينا} \quad v_n = v_0 \times q^n = (-20) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$u_n = v_n - 6n + 23 = (-20) \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23 : \text{ومنه}$$

$$S_n = v_0 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{ب})$$

$$S_n = (-60) \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right]$$

$$\pi_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n =$$

$$= (v_0 + 23) + (v_1 - 6 + 23) + \dots + (v_n - 6n + 23)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (23 + 17 + 11 + \dots + (23 - 6n))$$

$$23 + 17 + 11 + \dots + (23 - 6n) \text{ يمثل مجموع } (n+1) \text{ حدا}$$

$$\text{لمتتالية حسابية حدها الأول 23 و حدها الأخير } (23 - 6n) : \text{ومنه}$$

$$23 + 17 + \dots + (23 - 6n) = [23 + (23 - 6n)] \times \frac{n+1}{2} =$$

$$= (23 - 3n)(n+1)$$

$$\pi_n = S_n + (23 - 3n)(n+1) =$$

$$= -60 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) + (23 - 3n)(n+1)$$

$$(2) \quad (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{3} \text{ يعني } \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{2}{3} u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha(n+1) + \beta$$

$$= \frac{2}{3} u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$= \frac{2}{3} (u_n + \alpha n + \beta) + \frac{1}{3} \alpha n + \frac{1}{3} \beta + \alpha - 2n + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{2}{3} v_n + \left( \frac{\alpha}{3} - 2 \right) n + \frac{1}{3} \beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  يجب أن :

$$\left( \frac{\alpha}{3} - 2 \right) n + \frac{1}{3} \beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} - 2 = 0 \\ \frac{1}{3} \beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -23 \end{cases}$$

3- أ) إذا كان  $\alpha = 6$  و  $\beta = -23$  فإن  $(v_n)$  متتالية هندسية

(سؤال سابق) حدها الأول  $v_0 = u_0 + \beta = -20$  وأساسها  $\frac{2}{3}$



### تمرين 30

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها الأول  $v_0 = -\frac{1}{2}$

والعلاقة التراجعية :  $v_{n+1} = \frac{9v_n - 8}{2v_n + 1}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(1) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $v_n \neq 2$

(2)  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 2}$

(أ) بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

(ب) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  . ماذا نستنتج ؟

(3) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n+1}$

### الحل

(1) لنبرهن أن  $v_n \neq 2 \forall n \in \mathbb{N}$  نستعمل البرهان بالتراجع.

لتكن الخاصية  $p(n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n \neq 2$ .

لدينا  $v_0 = -\frac{1}{2} \neq 2$  إذن  $p(0)$  محققة.

لنفرض أن  $p(n)$  صحيحة ( $v_n \neq 2$ ) ولنبرهن على صحة

$p(n+1)$  أي ( $v_{n+1} \neq 2$ ) وهذا يعني نبرهن صحة الاستلزام :

$v_n \neq 2$  تستلزم  $v_{n+1} \neq 2$  . ونعلم أن :

( $v_n \neq 2$  تستلزم  $v_{n+1} \neq 2$ ) يكافئ ( $v_{n+1} = 2$  تستلزم  $v_n = 2$ )

$$v_{n+1} = \frac{9v_n - 8}{2v_n + 1} = 2 \text{ ومنه } 9v_n - 8 = 2(2v_n + 1) \text{ ومنه } v_n = 2$$

بما أن  $p(n)$  تستلزم  $p(n+1)$  فإن  $p(n)$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ( $v_n \neq 2$ )

(2-أ)  $(u_n)$  متتالية حسابية يعني :  $u_{n+1} - u_n = r$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2v_{n+1} + 1}{v_{n+1} - 2} - \frac{2v_n + 1}{v_n - 2} =$$

$$\frac{2 \times \frac{9v_n - 8}{2v_n + 1} + 1}{\frac{9v_n - 8}{2v_n + 1} - 2} - \frac{2v_n + 1}{v_n - 2} =$$

$$= \frac{20v_n - 15}{5v_n - 10} - \frac{2v_n + 1}{v_n - 2} = \frac{2v_n - 4}{v_n - 2} = \frac{2(v_n - 2)}{v_n - 2} = 2$$

إذن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول  $u_0 = 0$

(ب)  $u_n = u_0 + nr = 2n$  . لدينا :  $u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 2}$  ومنه :

$$v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n - 2} = \frac{4n + 1}{2n - 2} \text{ ومنه : } v_n(u_n - 2) = 2u_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n + 1}{2n - 2} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \quad (\text{ج})$$

نستنتج أن المتتالية  $(v_n)$  متقاربة وأن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة



(2) لدينا  $u_n = 2n$  ومنه :

$$= 2, u_3 = 6, u_5 = 10, \dots, u_{2n+1} = 2(2n+1) = 4n+2$$

نلاحظ أن  $2(2n-1), 2(2n+1), \dots, 14, 10, 6, 2$  هي

تمثل  $(n+1)$  حدا متتبعاً لمتتالية حسابية حدها الأول 2

وحدها الأخير  $u_{2n+1} = 4n+2$  وأساسها  $r = 4$  ومنه :

$$S_n = u_1 + \dots + u_{2n+1} = (u_1 + u_{2n+1}) \left( \frac{n+1}{2} \right) =$$

$$= (4n+4) \left( \frac{n+1}{2} \right) = 2(n+1)^2$$

### تمرين 31

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_0 = 0$  والعلاقة التراجعية :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha - 2) \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{R}^{++}.$$

(1) عين  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  ثابتة .

(2) نفرض أن  $\alpha \geq 2$  . (أ) برهن أن  $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \geq 0$

(ب) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  متزايدة .

(3) نفرض أن  $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$  ونعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة من أجل

كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $u_n = 2(2 + v_n)$  .

(أ) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية بطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

(ب) احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  .

(ج) عين قيم  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متقاربة

### الحل

$(v_n)$  ثابتة يعني :  $v_0 = v_1 = \dots = v_{n-1} = v_n$  .

لدينا :  $2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha - 2)$  ومنه تكون  $(v_n)$  ثابتة إذا كان

$$2v_0 = \alpha v_0 + 2(\alpha - 2) \text{ ومنه : } 0 = 2(\alpha - 2) \text{ ومنه } \alpha = 2$$

(2-أ) لنبرهن أن  $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \geq 0$  نستعمل البرهان بالتراجع .

لدينا  $v_0 = 0$  ومنه  $p(0)$  محققة . نفرض أن  $p(n)$  صحيحة

$(v_n \geq 0)$  ولنبرهن على صحة  $p(n+1)$   $(v_{n+1} \geq 0)$  .

لدينا  $v_n \geq 0$  (حسب الفرضية) و  $v_{n+1} = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2)$  .

$$v_n \geq 0 \text{ ومنه } \frac{\alpha}{2}v_n \geq 0 \text{ ومنه } \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2) \geq 0 \text{ (لأن } \alpha \geq 2 \text{)}$$

أي  $v_{n+1} \geq 0$  .

بما أن  $p(n+1)$  صحيحة فإن  $p(n)$  صحيحة من أجل

كل عدد طبيعي  $n$  أي  $v_n \geq 0$  .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2) - v_n = \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) v_n + (\alpha - 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 2)v_n + (\alpha - 2) = (\alpha - 2) \left( \frac{1}{2}v_n + 1 \right) \geq 0$$

(لأن  $\alpha \geq 2$  و  $v_n \geq 0$ ) . بما أن  $v_{n+1} - v_n \geq 0$  فإن  $(v_n)$  متزايدة



3-أ) تكون  $(u_n)$  متتالية هندسية إذا تحقق  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n q$

$$u_{n+1} = 2(2 + v_{n+1}) = 2\left(2 + \frac{\alpha}{2}v_n + \alpha - 2\right) = 2\left(\frac{\alpha}{2}v_n + \alpha\right) = \frac{\alpha}{2} \times 2(v_n + 2) = \frac{\alpha}{2} u_n$$

إذن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 4$  وأساسها  $q = \frac{\alpha}{2}$

ب)  $u_n = u_0 q^n = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$  لدينا  $u_n = 2(2 + v_n)$

ومنه :  $v_n = \frac{1}{2}u_n - 2 = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - 2$

ج) تكون  $(v_n)$  متتالية متقاربة إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

تكون  $(v_n)$  متقاربة إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = 0$  وهذا يعني :  $\left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$

$\left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$  يكافئ  $-1 < \frac{\alpha}{2} < 1$  يكافئ  $-2 < \alpha < 2$

إذا كان  $\alpha \in ]-2 ; 2[$  فالمتتالية  $(v_n)$  متقاربة وتتقارب نحو  $(-2)$

### تمرين 32

1) أحسب المجموع  $s = 1 + 7 + 13 + \dots + (6n + 1)$

2) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :

$v_0 = 2$  والعلاقة التراجعية :  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3n + \frac{13}{2}$

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = v_n - 6n - 1$

أ) أوجد العلاقة التي تربط بين  $u_n$  و  $u_{n+1}$

ب) عبر عن  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$

ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) أحسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $\pi_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

### الحل

1)  $(1, 7, 13, \dots, (6n + 1))$  هي حدود متتابعة لمتتالية

حسابية حدها الأول 1 وأساسها  $r = 6$  وحدها العام  $u_n = 6n + 1$

إذا استبدلنا في عبارة الحد العام  $n$  بالقيم  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  نحصل

على  $(n + 1)$  حدا متتابعا ومنه :

$$s = 1 + 7 + 13 + \dots + (6n + 1) = [1 + (6n + 1)] \times (n + 1) / 2 = (3n + 1)(n + 1)$$

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 6(n + 1) - 1 = \frac{1}{2}v_n + 3n + \frac{13}{2} - 6n - 7 =$$

$$= \frac{1}{2}v_n - 3n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(v_n - 6n - 1) = \frac{1}{2}u_n$$



(ب) لدينا  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$  ومنه  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها

الأول  $u_0 = v_0 - 1 = 1$  ومنه  $u_n = u_0 q^n = \frac{1}{2^n}$ .

لدينا  $u_n = v_n - 6n - 1$  ومنه  $v_n = u_n + 6n + 1 = \frac{1}{2^n} + 6n + 1$

(ج)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \pi_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n = \\ &= (u_0 + 1) + (u_1 + 7) + \dots + (u_n + 6n + 1) = \\ &= (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (1 + 7 + \dots + 6n + 1) = \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + (3n + 1)(n + 1) \end{aligned}$$

### تمرين 33

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 1$  و بالعلاقة :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \alpha(u_n - 2) \quad \text{حيث } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

(1) عين العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة .

(2) نضع  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

(أ) بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -4$  (ب) بين أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة

(3)  $(v_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_n + 4$  عين  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$ .

(4) نفرض أن  $\alpha = \frac{2}{3}$  (أ) احسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ب)  $P_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + \dots + (v_n)^3$

### الحل

(1)  $(u_n)$  ثابتة يعني :  $u_n = u_{n+1}$  لدينا  $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$

تكون  $(u_n)$  ثابتة لما  $1 = \alpha(1 - 2)$  ومنه  $\alpha = -1$

(2- أ) لنبرهن أن  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -4$  نستعمل البرهان بالتراجع . لدينا :  $u_0 = 1 \geq -4$  ومنه  $p(0)$  محققة .

لنفرض أن  $p(n)$  صحيحة أي  $u_n \geq -4$  ولنبرهن على صحة

$p(n+1)$  أي  $u_{n+1} \geq -4$  لدينا فرضا  $u_n \geq -4$  ومنه :

$$u_{n+1} \geq -4 \quad \text{ومنه} \quad u_n - 2 \geq -6 \times \frac{2}{3} \quad \text{ومنه} \quad \frac{2}{3}(u_n - 2) \geq -4$$

إذن  $p(n+1)$  صحيحة ومنه  $p(n)$  صحيحة من أجل كل عدد

طبيعي  $n$  أي :  $u_n \geq -4$  ( $u_n + 4 \geq 0$ )



نعلم أن  $1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3n}$  يمثل مجموع  $(n+1)$  حدا متتابعاً

لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها  $q^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3n} = \frac{1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{27}{19} \left[ 1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1} \right]$$

$$P_n = 125 \times \frac{27}{19} \left[ 1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1} \right]$$

### تمرين 34

في السنة 1995 صنع معمل 2000 دراجة ، نفرض أن عدد الدراجات المصنوعة في هذا المعمل يزداد كل عام بنسبة 5%.

- (1) ما هو عدد الدراجات الذي سيصنعها هذا المعمل في سنة 2000.
- (2) في أي سنة يكون عدد الدراجات المصنوعة من طرف هذا المصنع أكبر من 50000 دراجة ؟

### الحل .

- (1) لنرمز بـ  $u_0$  إلى عدد الدراجات التي صنعت في سنة 1995 أي: (دراجة)  $u_0 = 20000$  . و بعد سنة (سنة 1996) يكون عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل :  $u_1 = u_0 + 0,05u_0 = 1,05u_0$  في سنة 1997 يكون عدد الدراجات :  $u_2 = u_1 + 0,05u_1 = 1,05u_1$ .

$$(ب) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(u_n - 2) - u_n = -\frac{1}{3}(u_n + 4) \leq 0$$

بما أن  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  فالمتتالية  $(u_n)$  متناقصة

(3) تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا تحقق  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n \times q$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 = \alpha(u_n - 2) + 4 = \alpha(u_n + 4) - 6\alpha + 4 = \\ &= \alpha \times v_n - 6\alpha + 4 \end{aligned}$$

حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يجب أن :  $4 - 6\alpha = 0$  ومنه  $\alpha = \frac{2}{3}$

لما  $\alpha = \frac{2}{3}$  فالمتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = 5$

(4) لدينا  $\alpha = \frac{2}{3}$  ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية.

أ-

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \dots + (v_n - 4) =$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 4(n+1) = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} =$$

$$= 15 \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] - 4(n+1)$$

ب-

$$\begin{aligned} P_n &= (v_0)^3 + (v_1)^3 + \dots + (v_n)^3 = \\ &= (v_0)^3 + (v_0 q)^3 + \dots + (v_0 q^n)^3 = (v_0)^3 (1 + q^3 + \dots + q^{3n}) \end{aligned}$$



وفي سنة 1998 يكون عدد الدراجات:  $u_3 = u_2 + 0,05u_2 = 1,05u_2$   
 وفي سنة  $(1995 + n)$  يكون:  $u_n = u_{n-1} + 0,05u_{n-1} = 1,05u_{n-1}$   
 إذن عدد الدراجات المصنوعة في هذا المعمل يمثل حدود متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 20000$  وأساسها  $q = 1,05$ .  
 عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل في سنة 2000 هو:

$$u_5 = u_0 \times q^5 = 20000 \times (1,05)^5 = 25524$$

(2) نعلم أن عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل بعد  $n$  سنة هو:  
 $u_n = u_0 \times q^n = 20000 \times (1,05)^n$ . إذن عدد السنوات التي يكون فيها الإنتاج أكبر من 50000 هو الحل للمترابطة:

$$20000 \times (1,05)^n > 50000 \text{ ومنه } (1,05)^n > 2,5$$

باستعمال اللوغارتم النبيري نحصل على:  $n \ln 1,05 > \ln 2,5$   
 ومنه:  $0,048 \times n > 0,916$  ومنه:  $n > 19,08$

إذن  $n = 20$  في سنة  $(1995 + 20)$  أي سنة 2015.

### تمرين 35

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_0 = 2$  والعلاقة:

$$u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \text{ لتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N}$$

$$\text{بـ: } \forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n + \alpha n - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(1) عين العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$ . في كل ما يأتي نفرض  $\alpha = 2$

$$(2) \text{ استنتج أن : } v_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$$

$$(3) \text{ نضع : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ . أحسب } S_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

### الحل

(1) تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا تحقق  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n q$

$$\text{لدينا : } u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \text{ ومنه : } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha(n+1) - 1 = \\ &= \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2} + \alpha(n+1) - 1 = \\ &= \frac{1}{2}(u_n + \alpha n - 1) + \frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = \\ &= \frac{1}{2}v_n + \left( \frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 \right) \end{aligned}$$

تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا كان:  $\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$

$$\frac{n}{2}(\alpha - 2) + (\alpha - 2) = 0 \text{ ومنه : } \frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$$

$$\text{ومنه } \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (\alpha - 2) = 0 \text{ ومنه } \alpha - 2 = 0 \text{ ومنه : } \alpha = 2$$

تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية إذا كان  $\alpha = 2$  ويكون حدها الأول



## الحل

(1) نعلم إذا كان  $f(x) > 0$  لما  $x \in [a, b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx > 0$

بما أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا  $e^{-x+1} > 0$  فإن :

$$\int_n^{n+1} f(x) dx > 0 \text{ ومنه } u_n > 0 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(2-أ) لدينا  $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$  ومنه

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx = [-e^{-x+1}]_n^{n+1} = -e^{-(n+1)+1} + e^{-n+1} = -e^{-n} + e^{-n+1} = -e^{-n} + e \times e^{-n} = (e-1)e^{-n}$$

(ب)  $u_{n+1} = (e-1)e^{-(n+1)} = e^{-1}(e-1)e^{-n} = e^{-1} \times u_n$

بما أن  $u_{n+1} = \frac{1}{e} u_n$  فإن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها

الأول  $u_0 = e-1$  وأساسها  $q = \frac{1}{e}$ .

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (e-1) \frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-e^{-1}} =$$

$$= (e-1) \times \frac{e}{e-1} \times (1-e^{-(n+1)}) = e(1-e^{-(n+1)})$$

$$v_0 = u_0 - 1 = 1 \text{ وأساسها } q = \frac{1}{2}.$$

(2) لما  $\alpha = 2$  فالمتتالية  $(v_n)$  هندسية ويكون  $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

لدينا :  $v_n = u_n + 2n - 1$  ومنه :  $u_n = v_n - 2n + 1$

إذن :  $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

(3)  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$  (لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ )  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2$

## تمرين 36

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n > 0$

(2-أ) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(ب) استنتج أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $u_0$

وأساسها  $q$ . (3) نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(أ) أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$ . (ب) بين أن  $S_n = \int_0^{n+1} e^{-x+1} dx$



## الحل

1- أ) تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا وجد عدد  $q$  بحيث  $v_{n+1} = v_n q$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{\alpha-3} = \frac{3}{\alpha} u_n + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha-3} = \\ &= \frac{3}{\alpha} u_n + \frac{2(\alpha-3)-2\alpha}{\alpha(\alpha-3)} = \frac{3}{\alpha} u_n - \frac{6}{\alpha(\alpha-3)} = \\ &= \frac{3}{\alpha} \left( u_n - \frac{2}{\alpha-3} \right) = \frac{3}{\alpha} v_n \end{aligned}$$

إذن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{3}{\alpha}$  وحدها الأول

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{\alpha-3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{\alpha-3} = \frac{5\alpha-21}{3(\alpha-3)}$$

ب) تكون المتتالية الهندسية متقاربة إذا كان  $-1 < q < 1$  ومنه  $(v_n)$  متقاربة إذا وفقط  $-1 < 3/\alpha < 1$  ومنه :

$$-1 < \frac{3}{\alpha} < 1 \text{ يكافئ } \left( \frac{3}{\alpha} < 1 \text{ و } \frac{3}{\alpha} > -1 \right) \text{ أي :}$$

$$\left( \frac{3+\alpha}{\alpha} > 0 \text{ و } \frac{3-\alpha}{\alpha} < 0 \right) \text{ ومنه :}$$

$$\alpha \in ]-\infty; 0[ \cup ]3; +\infty[ \text{ و } \alpha \in ]-\infty; -3[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\text{إذن : } \alpha \in ]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = \int_0^1 e^{-x+1} dx + \dots + \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx \text{ (ب)}$$

نعلم أن إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[a; k]$  فإن :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^k f(x) dx = \int_a^k f(x) dx$$

$$S_n = \int_0^1 e^{-x+1} dx + \int_1^2 e^{-x+1} dx + \dots + \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx = \int_0^{n+1} e^{-x+1} dx$$

## تمرين 37

لتكن المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = 5/3$  ومن أجل كل

عدد طبيعي غير معدوم :  $\alpha u_n = 3u_{n-1} + 2$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$

نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ :

$$v_n = u_n - \frac{2}{\alpha-3} \text{ . 1- أ) أثبت أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية يطلب}$$

تعيين حدها الأول وأساسها بدلالة  $\alpha$  .

ب) عين  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متقاربة .

نفرض أن  $\alpha = 6$  . أ) عين عبارة  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ب) أحسب المجموع  $S_n = u_0 + \dots + u_n$

ج) أحسب  $\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2^n)$



2- (أ) لما  $\alpha = 6$  فإن  $v_0 = 1$  و  $q = \frac{1}{2}$  إذن :  $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

لدينا  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$  ومنه :  $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}$

(ب)  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n =$

$$= \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n+1) = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

→

$$\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + (v_2 + 2^2) + \dots + (v_n + 2^n) =$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - \frac{1}{2^n} + 1$$

لأن  $1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$  وهي تمثل مجموع

لـ  $(n+1)$  حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2

### تمرين 38

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0 \end{cases} \text{ و } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

(1) أحسب  $u_2$  و  $u_3$  ثم  $v_0$  و  $v_1$ .

2- (أ) أثبت أن  $(v_n)$  ثابتة وحدد قيمة  $v_n$ . (ب) استنتج  $u_{n+1}$  بدلالة  $u_n$

(3) لتكن المتتالية  $(p_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $p_n = u_n - 3$

(أ) بين أن  $(p_n)$  هي متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

(ب) أحسب  $p_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ . (ج) أحسب بدلالة  $n$  كل من :

$$S_2 = u_0 + \dots + u_n, \quad S_1 = p_0 + \dots + p_n$$

$$\pi = p_0 \times \dots \times p_n$$

### الحل

(1) لدينا :  $2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0$  ومنه :  $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$

$$u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{11}{4}, \quad u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{5}{2}$$

$$v_1 = u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{2}, \quad v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2}$$

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n = u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = v_{n-1}$$

(2) أ- بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $v_n = v_{n-1}$  فالمتتالية

$(v_n)$  ثابتة



$$= p_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n} = (p_0)^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (-2)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

### تمرين 39

لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_1 = \alpha$  ومن أجل كل

عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية :  $3v_{n+1} - 2v_n = 3$ .

(1) أحسب  $v_2, v_3, v_4$  بدلالة  $\alpha$

(2) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ :  $u_n = v_n - 3$

(أ) أحسب  $u_1$  وبين أن  $3u_{n+1} - 2u_n = 0$  . ماذا نستنتج ؟

(ب) أحسب  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $\alpha$  و  $n$ .

(3) أحسب  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ،  $S'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(4)  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية عددية معرفة بـ :  $p_n = v_n + \alpha$

(أ) عين العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون  $(p_n)$  متتالية هندسية .

(ب) نفرض أن  $\alpha = -3$  . أحسب :  $\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$

### الحل

(1) لدينا  $3v_{n+1} - 2v_n = 3$  ومنه :  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$  إذن :

$$v_4 = \frac{8}{27}\alpha + \frac{19}{9} , \quad v_3 = \frac{4}{9}\alpha + \frac{5}{3} , \quad v_2 = \frac{2}{3}\alpha + 1$$

$$u_1 = v_1 - 3 = \alpha - 3 \quad (1-2)$$

ومنه  $v_0 = v_1 = \dots = v_n = \frac{3}{2}$  لدينا (ب)  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ومنه :  $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}$  معناه :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

3- (أ) تكون  $(p_n)$  متتالية هندسية إذا وجد عدد  $q$  بحيث  $p_{n+1} = p_n q$

$$p_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}p_n$$

بما أن  $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$  فالمتتالية  $(p_n)$  هي هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها

الأول  $p_0 = -2$  . (ب)  $p_n = p_0 \times q^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$

لدينا  $p_n = u_n - 3$  ومنه :  $u_n = p_n + 3 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3$

$$S_1 = p_0 + \dots + p_n = p_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -4 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad (ج)$$

$$S_2 = u_0 + \dots + u_n = (p_0 + 3) + \dots + (p_n + 3) =$$

$$= (p_0 + \dots + p_n) + 3(n+1) = -4 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 3(n+1)$$

$$\pi = p_0 \times p_1 \times \dots \times p_n =$$

$$= p_0 \times (p_0 q) \times \dots \times (p_0 q^n) = (p_0)^{n+1} \times q \times q^2 \times \dots \times q^n =$$



(4) تكون المتتالية  $(p_n)$  هندسية إذا وجد عدد  $q$  بحيث  $p_{n+1} = p_n \times q$

$$p_{n+1} = v_{n+1} + \alpha = \frac{2}{3}v_n + 1 + \alpha = \frac{2}{3}(v_n + \alpha) + \frac{1}{3}\alpha + 1 = \frac{2}{3}p_n + \left(\frac{1}{3}\alpha + 1\right)$$

تكون  $(p_n)$  متتالية هندسية إذا كان  $\frac{1}{3}\alpha + 1 = 0$  أي  $\alpha = -3$

من أجل  $\alpha = -3$  المتتالية  $(p_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدها

$$p_1 = v_1 + \alpha = 2\alpha = -6 \text{ الأول}$$

$$\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_1^2 + (u_1q)^2 + \dots + (u_1q^{n-1})^2 = u_1^2(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)})$$

$$= 36 \left( 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} \right)$$

$$\left( 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} \right)$$

هو مجموع  $n$  حدا متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول 1

$$\text{وأساسها } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{ إذن:}$$

لدينا :  $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$  و  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$  ومنه :

$$3u_{n+1} - 2u_n = 3(v_{n+1} - 3) - 2(v_n - 3) = 3\left(\frac{2}{3}v_n - 2\right) - 2v_n + 6 = 2v_n - 6 - 2v_n + 6 = 0$$

بما أن  $3u_{n+1} - 2u_n = 0$  أي  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$  فالمتتالية  $(u_n)$

هندسية حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q = \frac{2}{3}$

$$u_n = v_n - 3 \text{ لدينا } u_n = u_1q^{n-1} = (\alpha - 3) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ ب-}$$

$$v_n = u_n + 3 = (\alpha - 3) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3 \text{ ومنه :}$$

$$S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \quad (3)$$

$$= 3(\alpha - 3) \times \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$S'_n = v_1 + \dots + v_n = (u_1 + 3) + \dots + (u_n + 3) =$$

$$= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + 3n = S_n + 3n =$$

$$= 3(\alpha - 3) \times \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + 3n$$



## الحل

(1) تكون المتتالية  $(v_n)$  ثابتة إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون لدينا :  $v_{n+1} = v_n$  . إذا كان  $a = 2$  فإن :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}a^2 u_{n+1} + (a-3)u_n - u_{n+1} = \\ = \frac{1}{2}(2)^2 u_{n+1} + (2-3)u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = v_n$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $v_{n+1} = v_n$  فالمتتالية  $(v_n)$  هي متتالية ثابتة  $v_n = v_0 = u_1 - u_0 = 2$

(ب) لدينا  $u_{n+1} - u_n = v_n = 2$  حسب التعريف فالمتتالية  $(u_n)$  هي متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 1$  وأساسها 2.

(ج)  $u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$  .

(د) لدينا  $u_n = 1 + 2n$  وهو يمثل عدد فردي ؛

$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, \dots, u_n = 1 + 2n$  نلاحظ أن

حدود  $(u_n)$  هي الأعداد الطبيعية الفردية والمتتابعة

نعلم أن  $u_{49} = 1 + 2 \times 49 = 99$  ، ويكون مجموع الأعداد الفردية الأصغر من 100 هو :

$$1 + 3 + \dots + 99 = u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = (u_0 + u_{49}) \times \frac{50}{2} =$$

$$= (1 + 99) \times 25 = 100 \times 25 = 2500$$

(2- أ) إذا كان  $a = -4$  فإن :  $u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n$

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)} = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

إذن :  $\pi_n = 36 \times \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

## تمرين 40

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$

بـ :  $u_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 u_{n+1} + (a-3)u_n$  حيث  $a$  عدد حقيقي .

لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  .  
(1) نضع  $a = 2$  .

(أ) تحقق بأن المتتالية  $(v_n)$  ثابتة .

(ب) استنتج أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها لأول.

(ج) عبر بدلالة  $n$  عن  $u_n$  و  $S_n = u_0 + \dots + u_n$  .

(د) استنتج مجموع الأعداد الفردية الأصغر من 100

(2) نضع  $a = -4$

(أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب إعطاء حدها العام

(ب) أحسب  $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(ج) برهن أن  $S'_n = u_{n+1} - 1$  واستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة .



## تمارين مرفقة بالنتائج

### تمرين 01

$a, b, c$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية حيث:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 153, \quad a + b + c = 9$$

(1) احسب  $a, b, c$ . (2) نفرض أن الحد الأول لهذه المتتالية الحسابية هو  $a = 1$ . - احسب  $S$  مجموع  $n$  حد الأولى لهذه المتتالية.

### - النتائج:

(1)  $(a; b; c) = (1; 3; 5)$  أو  $(a; b; c) = (5; 3; 1)$ .

(2) إذا كان  $a = 1$  فإن  $r = 2$  ومنه الحد الذي مرتبته  $n$  هو:

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)}{2} \times n = n^2. \text{ إذن } a + (n - 1)r = 2n - 1$$

### تمرين 02

نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  ذات الأساس الموجب و حدها

الأول  $u_1 = \frac{1}{2}$  و  $81u_{10} = 16u_6$ . (1) احسب أساس هذه المتتالية.

(2) احسب:  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ . (3) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### - النتائج:

(1) الأساس  $q$  للمتتالية هو  $q = \frac{2}{3}$ . (2)  $S_n = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right]$ .

تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا وجد عدد  $q$  بحيث  $v_{n+1} = v_n q$

$$= u_{n+2} - u_{n+1} = 8u_{n+1} - 7u_n - u_{n+1} = 7(u_{n+1} - u_n) = 7v_n$$

بما أن  $v_{n+1} = 7v_n$  فالمتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية أساسها 7

وحدها الأول  $v_0 = u_1 - u_0 = 2$  وحدها العام  $v_n = v_0 q^n = 2 \times 7^n$

$$S'_n = v_0 + \dots + v_n = 2 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \frac{1}{3} (7^{n+1} - 1) \quad \text{ب)}$$

ج) ولدينا أيضا:

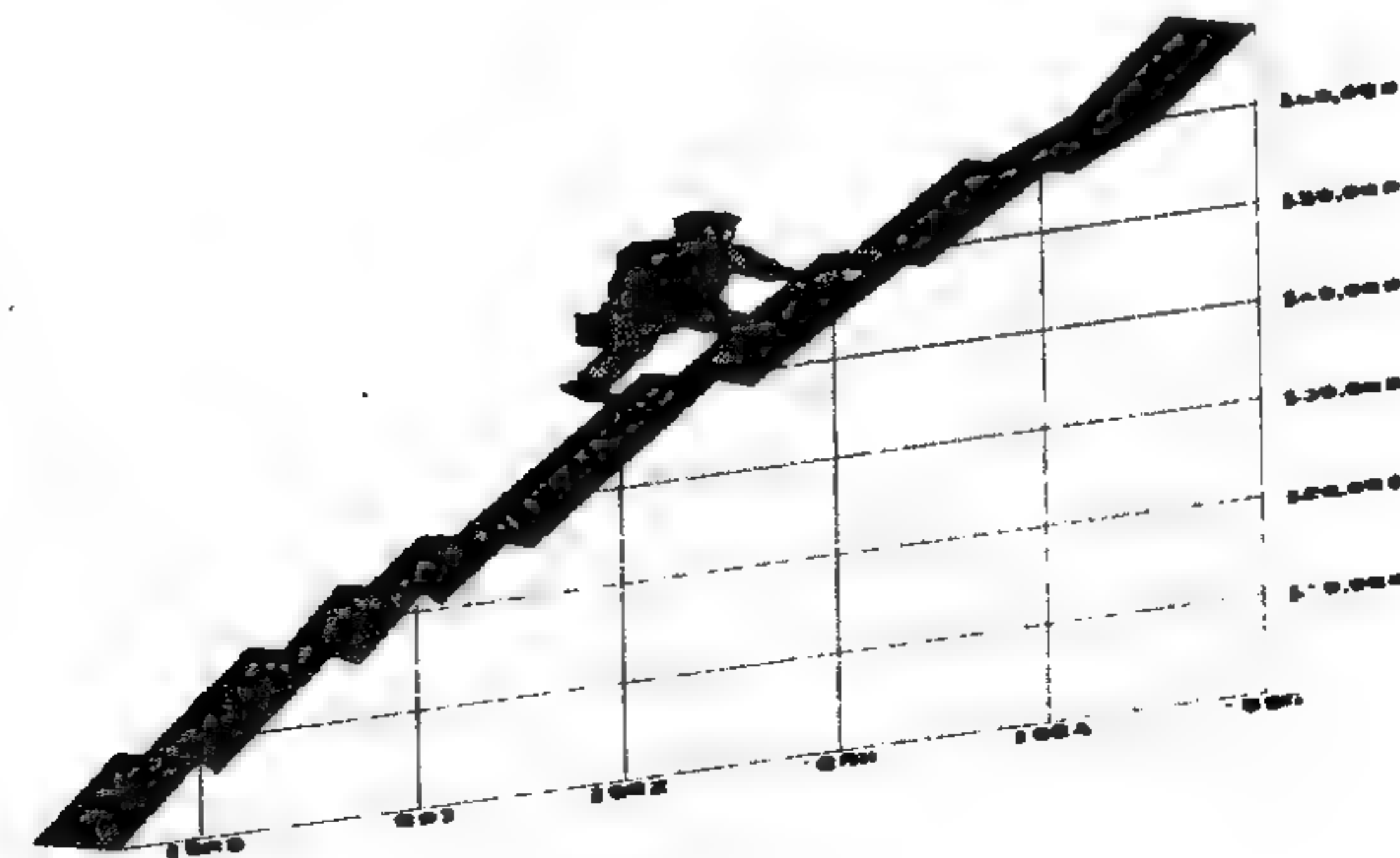
$$S'_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$$

لدينا:  $S'_n = u_{n+1} - 1$  ومنه:

$$u_{n+1} = S'_n + 1 = \frac{1}{3} (7^{n+1} - 1) + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (7^n - 1) + 1 = +\infty$$

فإن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة.





$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2} \quad (3)$$

### تمرين 03

(1) عين عددين حقيقيين موجبيين  $a$  و  $b$  بحيث :  $a$  ،  $(6a - b)$  ،  $(a + 2b)$  تكون الثلاثة حدود الأولى  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  لمتتالية حسابية  $(u_n)$  و  $a$  ،  $(b + 1)$  ،  $(4b - a)$  تكون الثلاثة حدود الأولى لمتتالية هندسية  $(v_n)$ . (2) عبر عن  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ .

#### - النتائج :

$$(1) \quad a = 2 \text{ و } b = 5 \quad (2) \quad u_n = 2 + 5n \text{ و } v_n = 2 \times 3^n$$

### تمرين 04

نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = 3$  والعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

(1) برهن أن  $u_n \neq 1$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . (2) لتكن المتتالية

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بالعلاقة } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

برهن أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها. (3) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

$$(4) \text{ أ- احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{ ب- ما هي نهاية } u_n \text{ لما } n \rightarrow +\infty.$$

#### - النتائج :

(1) نستعمل البرهان بالتراجع. (2)  $v_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot v_n$  إذن  $(v_n)$  هي

متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = \frac{1}{2}$  و أساسها  $\frac{2}{3}$ .

$$(3) \quad v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{ ب- } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

### تمرين 05

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_1 = \frac{1}{2}$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1)$  من

أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ .

(1) احسب  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$  ،  $u_5$ . (2) برهن أن  $(u_n)$  متزايدة.

(3) برهن بأن  $0 < u_n \leq 1$  مهما يكن العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$ ، ثم استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة و احسب نهايتها.

#### - النتائج :

$$(1) \quad u_2 = 0,62 \quad , \quad u_3 = 0,69 \quad , \quad u_4 = 0,74 \quad , \quad u_5 = 0,77$$

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0 \text{ ومنه : } (u_n) \text{ متزايدة.}$$



(3) نستعمل البرهان بالتراجع : لدينا  $0 < u_n \leq 1$  ومنه

$$0 < u_n^2 \leq 1 \quad \text{ومنه} : 1 < u_n^2 + 1 \leq 2 \quad \text{ومنه} :$$

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}(u_n^2 + 1) \leq 1$  . بما أن  $(u_n)$  متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

## تمرين 06

(I) لتكن المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ :  $u_0$  و  $u_1$  و علاقة التراجع :

$$(1) \dots u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

(1) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  هي متتالية هندسية . (2) احسب  $v_n$  بدلالة  $u_0$  ،  $u_1$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  ،  $u_0$  ،  $u_1$  . (3) احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(II) نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة بـ  $w_0$  و  $w_1$  حيث  $w_0$  و  $w_1$

$$w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 \cdot (w_n)^3} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

(1) برهن أن المتتالية  $(t_n)$  المعرفة بـ :

$$t_n = \ln w_n \quad \text{تحقق العلاقة (1) . (2) استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$$

- النتائج :

$$(I) \quad v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n \quad \text{إذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية ذات الأساس } -\frac{3}{5}.$$

$$v_n = (u_1 - u_0) \left(-\frac{3}{5}\right)^n \quad (2)$$

$$u_n = \frac{5u_1 + 3u_0}{8} - \frac{5}{8}(u_1 - u_0) \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5u_1 + 3u_0}{8} \quad (3)$$

$$t_{n+2} = \ln w_{n+2} = \frac{1}{5}(2 \ln w_{n+1} + 3 \ln w_n) \quad (II)$$

$$\text{ومنه} : t_{n+2} = \frac{2}{5}t_{n+1} + \frac{3}{5}t_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{5t_1 + 3t_0}{8} = \frac{5 \ln w_1 + 3 \ln w_0}{8} \quad (2)$$

## تمرين 07

لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = 2$

$$u_n = \frac{2 + u_{n-1}}{1 + 2u_{n-1}} \quad \text{من أجل } n \geq 1$$

(1) برهن أن  $u_n \neq -1$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  . (2) نعتبر المتتالية

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بـ } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{أكتب } v_n \text{ بدلالة } v_{n-1}$$

واستنتج عبارة  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  . (3) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$



## - النتائج:

(1) نستعمل البرهان بالتراجع .

$$v_n = -\frac{1}{3}v_{n-1} \quad , \quad v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$u_n = -1 + \frac{2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad (3)$$

## تمرين 08

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0$  و  $u_1$  و علاقة التراجع

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 2.$$

(1) لتكن المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $v_n = 3^n \cdot u_n$ .

أ - احسب :  $v_n - v_{n-1}$  بدلالة  $v_{n-1} - v_{n-2}$  واستنتج عبارة

$v_n - v_{n-1}$  بدلالة  $v_0$  و  $v_1$  . ب - احسب  $v_n$  بدلالة  $u_0$  و  $u_1$  و  $n$

(2) نضع  $u_0 = \frac{1}{3}$  و  $u_1 = 1$  . أ - ماذا نقول عن المتتاليتين

$(u_n)$  و  $(v_n)$  . ب - احسب  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

## - النتائج:

$$(1) \quad v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2} = v_1 - v_0$$

ب -  $v_n = \frac{n}{3}u_1 - (n-1)u_0$  (2) ، أ -  $v_n = \frac{1}{3}$  المتتالية  $(v_n)$  ثابتة

$u_n = 3^{n-1}$  المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية هندسية أساسها 3 .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad , \quad S_n = \frac{1}{3} - \frac{1-3^n}{2}$$

## تمرين 09

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_n = an + b$  حيث  $n$  عدد طبيعي

و  $a$  ،  $b$  عدنان حقيقيان . (1) برهن بأن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب

تعيين حدها الأول  $u_0$  و أساسها  $r$  .

(2) احسب :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $a$  ،  $b$  ،  $n$  .

(3) نفرض أن  $a$  عدد حقيقي غير معدوم و نعتبر المتتالية  $(v_n)$

المعرفة بـ :  $v_n = 3^{u_n}$  من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}$  . أ - برهن أن  $(v_n)$

هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$  و أساسها  $q$  .

ب - عين المجال الذي تنتمي إليه  $a$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$

متقاربة ، ثم احسب  $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$  بدلالة

$a$  ،  $b$  ،  $n$  . (4) عين  $a$  و  $b$  علما أن  $v_0 = 81$  و  $S_9 = -5$  .

احسب في هذه الحالة أصغر قيمة  $n_0$  للعدد  $n$  بحيث  $v_n < 10^{-5}$  .



### - النتائج:

$$(1) \quad u_{n+1} - u_n = a \text{ فالتتالية } (u_n) \text{ حسابية أساسها } a \text{ و حدها الأول}$$

$$(2) \quad u_0 = b \quad S_n = \frac{1}{2}(n+1)(an+2b)$$

$$(3) \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3^a \text{ إذن التتالية } (v_n) \text{ هي متتالية هندسية أساسها}$$

$$q = 3^a \text{ و حدها الأول } v_0 = 3^b \text{ . ب- تكون التتالية } (v_n) \text{ متقاربة}$$

$$\text{لما } a \in ]-\infty; 0] \quad , \quad S'_n = \boxed{3^b \cdot \frac{1-3^{(n+1)a}}{1-3^a}}$$

$$(4) \quad a = -1 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad n_0 = 15$$

### تمرين 10

نعتبر التتالية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول  $u_0$  ،

$$u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي غير معدوم. ليكن}$$

$a$  عدد حقيقي ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $v_n = u_n + a$  .

(1) احسب  $a$  حتى تصبح التتالية ذات الحد العام  $v_n$  متتالية هندسية

أساسها 3 ، و استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $u_0$  و  $n$  . (2) عين قيمة  $u_0$

حتى تكون التتالية  $(u_n)$  ثابتة. (3) نفرض أن  $a = 1$  و  $u_0 = 1$  .

أ- احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  .

ب- عين أصغر قيمة  $n_0$  للعدد  $n$  حتى تكون  $S_n > 10^4$  .

### - النتائج:

$$(1) \quad a = 1 \quad , \quad u_n = 3^n(u_0 + 1) - 1$$

$$(2) \quad \text{تكون } (u_n) \text{ ثابتة إذا كان } u_0 = -1 \text{ . (3) } S_n = 3^{n+1} - 1$$

$$\text{ب- لدينا } 3^9 = 19683 \text{ و } 3^8 = 6561 \text{ إذن } n_0 = 8$$

### تمرين 11

لتكن التتالية الهندسية  $(u_n)$  ذات الأساس  $q$  الموجب تماما .

$$(1) \quad \text{أ- عين } q \text{ علما أن } 625u_{12} = 16u_8 \text{ . ب- نرسم } S_n \text{ إلى}$$

$$\text{المجموع } \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ ، عبر عن } S_n \text{ بدلالة } u_1 \text{ و } n$$

$$\text{ج- عين } u_1 \text{ علما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

(2) نفرض أن التتالية  $(u_n)$  تحقق شروط السؤال الأول (1) و نعتبر

$$\text{التتالية } (v_n) \text{ المعرفة بحددها العام } v_n = 5u_n - 3$$

أ- عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  . ب- هل التتالية  $(v_n)$  متقاربة ؟

### - النتائج:

$$(1) \quad \text{أ- } q = \frac{2}{5} \text{ . ب- } S_n = \frac{5u_1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^n \right] \text{ ، ج- } u_1 = \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad \text{أ- } v_n = 3 \left[ \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1} - 1 \right] \text{ . ب- } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3 \text{ إذن } (v_n)$$

متتالية متقاربة.



## تمرين 12

لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $u_0 = \frac{1}{2}$  ،  $u_n = \frac{3u_{n-1}}{u_{n-1} + 1}$  .

و نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$  .

الطبيعي  $n$  . (1) برهن أن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها . (2) احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  .

(3) احسب  $u_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  لما  $n \rightarrow +\infty$  .

## - النتائج :

(1)  $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$  ومنه  $(v_n)$  هي متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  وحدها

الأول  $v_0 = -1$  . (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  .

(3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  ،  $u_n = \frac{1}{1 + 3^{-n}}$  .

## تمرين 13

استهلاك القمح في الجزائر يزداد كل عام بـ 10% . ليكن  $f(0)$  الكمية من القمح المستهلكة حاليا و  $f(n)$  الكمية من القمح المستهلكة في سنة  $n$  (عدد طبيعي) . (1) أوجد العلاقة بين  $f(n)$  و  $f(n+1)$  ، ثم عبر عن  $f(n)$  بدلالة  $f(0)$  و  $n$  . (2) في كم سنة يكون استهلاك الجزائر ضعف الاستهلاك الحالي؟

(3) إذا كان في هذه السنة الاستهلاك بلغ  $10^6$  (tonnes) ، فما هي كمية القمح المستهلكة بعد 20 سنة؟

## - النتائج :

(1)  $f(n+1) = \frac{11}{10} f(n)$  ، المتتالية  $f(n)$  هندسية أساسها 1,1

ومنه  $f(n) = f(0) \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n$  . (2)  $f(n) = 2f(0)$  ومنه :

$\left(\frac{11}{10}\right)^n = 2$  ومنه  $n = 7$  . (3) الكمية المستهلكة في 20 سنة هي :

$f(20)$  ومنه :  $f(20) = f(0) \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^{20}$  ومنه :

$$f(20) = 10^6 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^{20} = \boxed{6,72 \times 10^6 \text{ (tonnes)}}$$

## تمرين 14

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $u_1 = 1$  ،  $(u_{n+1})^2 = 4u_n$  .

(1) احسب  $u_2$  ،  $u_3$  ،  $u_4$  ،  $u_5$  و أعط النتائج على الشكل  $2^a$  .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ  $v_n = \ln u_n - \ln 4$  . برهن أن

$(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

(3) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  . احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .



(4) عين قيم  $n$  التي من أجلها يكون  $u_n > 3,96$ .

- النتائج:

$$(1) \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 2^{\frac{3}{2}}, \quad u_4 = 2^{\frac{7}{4}}, \quad u_5 = 2^{\frac{15}{8}}.$$

$$(2) \quad v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{4}\right) = \frac{1}{2} v_n \quad \text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية}$$

هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_1 = -2\ln 2$ .

$$(3) \quad v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{\ln 2}{2^{n-2}} \quad \text{ومنه } \ln u_n = v_n + \ln 4$$

$$u_n = 4e^{-\frac{\ln 2}{2^{n-2}}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

(4) يكون  $u_n > 3,96$  إذا كان  $n \geq 9$ .

### تمرين 15

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ:  $u_0 = -1$  و من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \quad u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n} \quad (1) \quad \text{احسب } u_1, u_2, u_3.$$

(2) برهن أن  $u_n > 0$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ .

(3) برهن أن  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ .

(4) عين اتجاه تغيرات المتتالية  $(u_n)$ . (5) نعتبر المتتالية

$$(v_n) \text{ المعرفة بـ: } v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}, \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

أ- برهن أن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$

و أساسها. ب- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

- النتائج:

$$(1) \quad u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{5}{3}, \quad u_3 = \frac{19}{11} \quad (2) \quad \text{نستعمل البرهان بالتراجع}$$

لنبرهن أن  $u_n > 0$ . (3) نستعمل البرهان بالتراجع لنبرهن أن

$$u_n < \sqrt{3} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

$$(4) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{3} + u_n)(\sqrt{3} - u_n)}{2 + u_n} \quad \text{ونعلم أن } u_n > 0$$

و  $u_n < \sqrt{3}$  (السؤالين 2 و 3) إذن  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه  $(u_n)$

متتالية متزايدة. (5) أ-  $v_{n+1} = (2 - \sqrt{3})^2 \times v_n$  ومنه  $(v_n)$  متتالية

$$\text{هندسية أساسها } (2 - \sqrt{3})^2 \quad \text{وحدها الأول } v_0 = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}.$$

$$\text{ب- } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}.$$



## تمرين 16

$(u_n)$  متتالية حسابية متناقصة أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$  حيث :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 18 \quad \text{و} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 116$$

(1) أ- عين الحد الأول  $u_0$  و الأساس  $r$  لهذه المتتالية .

ب- استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  . (2) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

المعرفة بـ  $v_n = e^{u_n}$  .  $e$  هو أساس اللوغارتم النبيري :

(  $e = 2,71...$  ) . أ- برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين

أساسها وحدها الأول  $v_0$  . ب- نضع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$\text{و} \quad S'_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

- احسب  $S_n$  و  $S'_n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$  .

- النتائج :

(1) أ-  $u_0 = 10$  و  $r = -2$  . ب-  $u_n = 10 - 2n$  .

(2) أ-  $v_{n+1} = \frac{1}{e^2} \times v_n$  ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{e^2}$

وحدها الأول  $v_0 = e^{10}$  . ب-  $S_n = \frac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \times e^{12}$  .

و  $S'_n = e^{-n^2 + 11n}$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = 0$  .

## تمرين 17

لتكن المتتالية ذات الحد العام و المعرفة بـ  $u_n = 2^n - 5n + 6$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  . (1) احسب  $u_0, u_1, u_2, u_3$  . (2) نعتبر

المتتاليتين  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ،  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و المعرفتين بـ :  $w_n = 5n - 6$

و  $v_n = 2^n$  . أ- برهن أن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين

وحدها الأول  $v_0$  و أساسها  $q$  . ب- برهن أن  $(v_n)$  متباعدة .

ج- برهن أن  $(w_n)$  هي متتالية حسابية يطلب تعيين حدها

الأول  $w_0$  و أساسها  $r$  .

(3) نضع :  $S'_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$  ،  $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$$\text{و} \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- احسب  $S'_n$  و  $S''_n$  و  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$  .

- النتائج :

(1)  $u_0 = 7$  ،  $u_1 = 3$  ،  $u_2 = 0$  ،  $u_3 = -1$  . (2) أ- لدينا :

$v_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2 \times v_n$  ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية

أساسها 2 وحدها الأول  $v_0 = 1$  . ب-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  ومنه :

$(v_n)$  هي متتالية متباعدة . ج-  $w_{n+1} - w_n = 5$  ومنه  $(w_n)$  هي

متتالية حسابية أساسها  $r = 5$  وحدها الأول  $w_0 = -6$  .



$$S_n'' = \frac{n+1}{2} \times (5n-12) \text{ و } S_n' = 2^{n+1} - 1 \quad (3)$$

$$S_n = S_n' - S_n'' = 2^{n+1} - 1 - \frac{n+1}{2}(5n-12)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n' = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n'' = +\infty$$

### تمرين 18

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية موجبة حيث :  $u_1 \times u_3 = 64$

و  $5u_1 + u_2 = 88$  (1) عين  $u_1, u_2, u_3$  وأساس المتتالية .

2- (أ) عبر عن  $u_n$  بدلالة  $n$  . (ب) احسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

(3) عين الحد الذي يبدأ منه بحيث يكون مجموع 5 حدود متتابعة

من  $(u_n)$  يساوي  $\frac{31}{16}$  . (4) نعتبر المتتالية  $(\alpha_n)$  المعرفة بـ :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \text{ و } \alpha_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \text{ مهما يكن العدد الطبيعي } n .$$

أ- عين العددين الحقيقيين  $\gamma$  و  $\beta$  حيث  $\alpha_n = \frac{\gamma}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$

ب- احسب  $S' = \alpha_0 + \alpha_{10} + \dots + \alpha_{n-1}$

- النتائج :

(1)  $u_1 = 16, u_2 = 8, u_3 = 4$  . أساس المتتالية  $(u_n)$  هو  $\frac{1}{2}$

$$(2) \quad u_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ب-} \quad S_n = 64 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

(3) الحد الذي يبدأ منه هو  $u_5 = 1$  (4)  $\beta = -1, \gamma = 1$

$$\text{ب-} \quad S' = \alpha_0 + \alpha_{10} + \dots + \alpha_{n-1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

### تمرين 19

نعرف المتتالية  $(v_n)$  بـ :  $v_1 = 20, v_3 = 10$  و

$$v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} = 0 \text{ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n .$$

(1) اثبت أن  $(v_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$

وأساسها  $r$  . (2) عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب :

$$S_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{n-3} \quad (3) \quad \text{عين العدد الطبيعي } n \text{ حتى يكون}$$

$$S_n = 15 \quad (4) \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بـ: } u_n = 2^{v_n + 6n - 24} \text{ من}$$

أجل كل عدد طبيعي  $n$  . (أ) برهن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب

تعيين حدها الأول وأساسها  $q$  .

$$\text{ب) احسب : } P = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$

$$\text{و } S'_n = u_0 + \left(\frac{1}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n u_n$$

- النتائج :

(1)  $v_{n+1} - v_n = v_n - v_{n-1}$  ومنه المتتالية  $(v_n)$  متتالية حسابية

أساسها  $r = -5$  و حدها الأول  $v_0 = v_1 - r = 25$  .



$$(2) \quad v_n = 25 - 5n \quad , \quad S_n = (55 - 5n) \left( \frac{n-4}{2} \right)$$

$$(3) \quad S_n = 15 \text{ إذا كان } n = 10 \quad (4) \quad u_n = 2^{n+1} \text{ و } \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$$

إذن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 2$  و حدها الأول  $u_0 = 2$ .

$$\text{ب-} \quad P = \frac{n}{2}(n+1) \quad , \quad S'_n = 2(n+1)$$

## تمرين 20

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية حيث  $v_0$  أولي مع 5 و  $v_0 + v_2 = 55$  (1) احسب  $v_0, v_1, v_2$ . (2-أ) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(ب) احسب :  $S_n = v_4 + v_5 + \dots + v_{n+7}$ .

(3) عين العدد الطبيعي  $n$  حيث :  $S_n - 2^{6n+2} + 3 \equiv 0 [7]$ .

(4) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حيث :  $v_n = u_n - 2n - 1$ .

احسب :  $S'_n = u_4 + u_5 + \dots + u_{n+7}$ .

## - النتائج :

(1)  $v_0 = 11, v_1 = 22, v_2 = 44$  (2)  $v_n = 11 \times 2^n$  (3)  $S_n = 176(2^{n+4} - 1)$  (4)  $S'_n = 176(2^{n+4} - 1) + (n+12)(n+4)$

ب-  $S_n = 176(2^{n+4} - 1)$  (3)  $S_n - 2^{6+2} + 3 \equiv 0 [7]$  إذا كان  $n = 3k$  مع  $k \in \mathbb{N}$ .

(4)  $S'_n = 176(2^{n+4} - 1) + (n+12)(n+4)$

## تمرين 21

(1)  $a, b, c$  أعداد طبيعية بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية متزايدة. عين  $a, b$ , ج علما أن  $a + c = 30$  و

$PPCM(a, c) = 24$  (المضاعف المشترك الأصغر)

و  $PGCD(a, b) = 6$  (القاسم المشترك الأكبر).

(2) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بحددها العام  $u_n = 6 + 9n$ .

أ- احسب  $u_0, u_1, u_2$ . ب- برهن أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب

تعيين أساسها و حدها الأول. ج- عين رتبة الحد الذي قيمته 96.

(3) أ- احسب :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

و  $\pi_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_{n-1}}$ .

ب- عين العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $\ln \pi_n = 465$ .

## - النتائج :

(1)  $a = 6, b = 15, c = 24$  (2)  $u_0 = 6, u_1 = 15, u_2 = 24$ .

ب-  $u_{n+1} - u_n = 9$  فالمتتالية  $(u_n)$  حسابية أساسها  $r = 9$

و حدها الأول  $u_0 = 6$ . ج- رتبة الحد الذي قيمته 96 هي 11

و هو الحد  $u_{10}$  (3)  $S_n = (9n+3) \times \frac{n}{2}$  (4)  $\pi_n = e^{\frac{n}{2}(9n+3)}$

ب-  $\ln \pi_n = 465$  لما  $n = 10$ .



## تمرين 22

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

$$u_1 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{2} \text{ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n.$$

$$\text{و } v_1 = 12 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n :$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \text{ (1) نضع من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم :}$$

$$k_n = v_n - u_n \text{ (أ) برهن أن المتتالية } (k_n) \text{ هندسية يطلب تعيين}$$

حدها الأول وأساسها. (ب) عبر عن  $k_n$  بدلالة  $n$ .

$$(2) \text{ برهن أن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة وأن } (v_n) \text{ متناقصة.}$$

$$(3-أ) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم : } \alpha_n = 3u_n + 8v_n$$

برهن أن المتتالية  $(\alpha_n)$  ثابتة. (ب) استنتج عبارة  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ .

## - النتائج :

$$(1) k_{n+1} = \frac{1}{12} \times k_n - \frac{1}{12} \text{ ، فالمتتالية } (k_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{12}$$

$$\text{وحدها الأول } k_1 = 11 \text{ . (ب) } k_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} .$$

$$(2) u_{n+1} - u_n > 0 \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}$$

$$\text{و } v_{n+1} - v_n < 0 \text{ ومنه المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة.}$$

$$(3) \alpha_{n+1} = \alpha_n \text{ ومنه المتتالية } (\alpha_n) \text{ ثابتة.}$$

$$\text{ب- } v_n = 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 9 \text{ و } u_n = -8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 9$$

## تمرين 23

(I) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} - 1 = u_n + 2n + 3^n \end{cases} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) احسب المجاميع الآتية :

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) , S_2 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$$

$$(2) S = S_1 + S_2 \text{ . نعتبر المتتالية } (\alpha_n) \text{ المعرفة بـ :}$$

$$\alpha_n = u_{n+1} - u_n$$

احسب :  $S = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(II)  $(v_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = 1$  وأساسها موجب

$$\text{حيث : } \frac{v_n \times v_{n+2}}{v_{n-1} \times v_{n+1}} = 9$$

(أ) عين أساس المتتالية  $(v_n)$ . (ب) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

$$\text{ح- احسب المجموع } S_n = v_0 + \frac{v_1}{3^1} + \frac{v_2}{3^2} + \dots + \frac{v_n}{3^n}$$

## - النتائج :

$$(I) S_1 = (n+1)^2 \text{ و } S_2 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$



يطلب تحديد أساسها  $r$  وحدها الأول  $\beta_0$ .  
 ج) استنتج مجموعة الأعداد الزوجية الأصغر من 102 .  
 د) أحسب  $\pi_n = \beta_5 + \beta_6 + \dots + \beta_n$  ثم عين قيمة العدد الطبيعي  $n$  لكي يكون  $\pi_n = 90$  .

### - النتائج:

1) أ - نستعمل البرهان بالتراجع.  
 ب -  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(1 - u_n) > 0$  ومنه  $(u_n)$  متزايدة.  
 2) إذا كان  $\alpha = 1$  فإن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  وحدها الأول  $V_0 = -1$  .

$$3) \text{ أ - } S'_n = \frac{9}{5} \times \left[ 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right], S_n = 3 \times \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right] + n$$

$$\text{ب - } \beta_n = V_n + 2n + \left( \frac{2}{3} \right)^n = - \left( \frac{2}{3} \right)^n + 2n + \left( \frac{2}{3} \right)^n = 2n$$

و بما أن  $\beta_{n+1} - \beta_n = 2$  فالمتتالية  $(\beta_n)$  حسابية أساسها 2 وحدها الأول  $\beta_0 = 0$  .

ج - مجموع الأعداد الزوجية الأصغر من 102 هو :

$$\pi_n = (n+5)(n-4) \text{ د - } (0+100) \times \frac{51}{2} = 2550$$

حتى يكون  $\pi_n = 90$  هي  $n = 10$  .

$$\text{و } S = S_1 + S_2 = (n+1)^2 + \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$$2) u_n = n^2 + \frac{3^n - 1}{2} - 1$$

II) أ - أساس المتتالية  $(v_n)$  هو  $q = 3$  . ب -  $v_n = 3^n$  .

$$\text{ج - } S_n = \boxed{n+1}$$

### تمرين 24

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  حيث :  $u_0 = 0$  و

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + 1)$$

1- أ) برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن  $0 \leq u_n < 1$  .

ب) برهن أن  $(u_n)$  متزايدة تماما .

2- لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ  $v_n = u_n - \alpha$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$  - عين قيمة  $\alpha$  . حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  .

3- فيما يلي نفرض أن  $\alpha = 1$  . أ) احسب المجاميع الآتية:

$$S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

ب) نعتبر المتتالية  $(\beta_n)$  المعرفة بـ من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$\beta_n = v_n + 2n + \left( \frac{2}{3} \right)^n \text{ - بين أن } (\beta_n) \text{ هي متتالية حسابية}$$



## تمرين 25

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :

$$(1) \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n \end{cases} \text{ احسب } u_1 \text{ و } u_2 .$$

(2) أ- أثبت أن :  $u_n \geq n$  مهما يكن العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  .

ب- استنتج  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  . (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_n = u_n - 4n + 8 . \text{ أ- احسب } v_0 \text{ و } v_1 . \text{ ب- بين أن } (v_n)$$

متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  . ج- احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج قيمة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

## - النتائج :

$$(1) u_1 = 1 \text{ و } u_2 = \frac{5}{2} . \text{ أ- نبرهن بالتراجع .}$$

$$\text{ب- } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty . \text{ أ- } v_0 = 10 \text{ و } v_1 = 5 .$$

$$\text{ب- لدينا } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ فالمتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{2} .$$

$$\text{ج- } v_n = 10 \left( \frac{1}{2} \right)^n , \quad u_n = 10 \left( \frac{1}{2} \right)^n + 4n - 8$$

## تمرين 26

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين بما يلي :

$$u_1 = 1 \text{ و } v_1 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n \text{ أكبر أو يساوي } 2 \text{ ب-}$$

$$3u_n - v_{n-1} = \frac{2-n}{n-1} \text{ و } u_n - v_n = -1 + \frac{1}{n} .$$

$$(1) \text{ احسب } u_2 \text{ و } v_2 . \text{ أ- بين أن } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{3}$$

(ب) احسب  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$  .

$$(3) \text{ أ- أثبت باستعمال البرهان بالتراجع أن : } u_n \leq \frac{1}{n} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$\text{ب- بين أن : } 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

(ج) استنتج أن المتتالية  $(v_n)$  متقاربة وحدد نهايتها .

## - النتائج :

$$(1) u_2 = \frac{1}{3} , \quad v_2 = \frac{5}{6} , \quad \text{أ- } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \text{ إذن}$$

$$(u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{3} . \text{ ب- } u_n = \frac{1}{3^{n-1}} \text{ و}$$

$$(3) \text{ ج- } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \text{ إذن } (v_n) \text{ متقاربة .}$$

## تمرين 27

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد

طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$  حيث  $\alpha$  عدد

حقيقي . (1) أحسب  $u_1, u_2, u_3$  .

(2) بين أن لكل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \frac{1}{2^n} + \alpha \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2} \right)$$

(3) نضع لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - \alpha$  .

(أ) بين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية محدد أساسها وحدها الأول

(ب) أحسب بدلالة  $n$  و  $\alpha$  المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  .

## - النتائج :

$$(1) u_1 = \frac{1}{2}(\alpha + 1), u_2 = \frac{1}{4}(3\alpha + 1)$$

(2) نستعمل البرهان بالتراجع أو المجموع

$$s = \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2} \right) \quad n \text{ حدا لمتتالية هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } \frac{1}{2} .$$

$$(3) v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ وهذا يعني أن } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = 1 - \alpha$$

## تمرين 28

نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  غير منتهية وكل حدودها موجبة حيث

$$\text{حدها الأول } u_1 = 3 \text{ و } u_3 + u_5 = \frac{15}{6} \text{ عین أساس هذه المتتالية}$$

(2- أ) أحسب المجموع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

(ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  . نضع  $v_n = \ln u_n$

(3- أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية حسابية يطلب تعيين

أساسها . (ب) أحسب المجموع  $S'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

## - النتائج :

$$(1) q = \frac{1}{2} \quad (2- أ) S_n = 6 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \quad (ب) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$$

(3- أ)  $v_{n+1} - v_n = -\ln 2$  إذن  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $-\ln 2$

$$(ب) S'_n = \ln \frac{81}{64}$$



## تمرين 29

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $u_0$  الموجب تماما ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية  $u_{n+1} - u_n = 0,05u_n$

1- أ) أثبت أن ( $u_n$ ) متتالية هندسية. ب) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $u_0$

2) نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  و  $u_0$  ثم عين  $n$  حتى يكون  $S_n \geq 20u_0$ .

3) بلغ عدد سكان بلد 20 مليون نسمة يوم 1 جانفي 1987.

نفرض أن عدد سكان هذا البلد يرتفع كل سنة بنسبة قدرها 5%.

أ) ما هو عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 1990.

ب) ابتداء من أي سنة سيتجاوز عدد سكان هذا البلد 30 مليون نسمة؟

## - النتائج :

1- أ) من العلاقة التراجعية نستنتج ما يلي :  $u_{n+1} = 1,05u_n$

إذن ( $u_n$ ) متتالية هندسية أساسها 1,05. ب)  $u_n = u_0 \times (1,05)^n$

3- أ) عدد سكان يوم 1 جانفي 1990 هو 23,152 مليون

ب) ابتداء من سنة 1996 سيتجاوز عدد سكان هذا البلد 30 مليون.

## تمرين 30

( $v_n$ ) متتالية عددية معرفة بحدها الأول  $v_0$  الموجب تماما

ولكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  بالعلاقة التراجعية :  $v_{n+1} = \frac{5v_n + 2}{v_n + 4}$

1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $v_n > 0$

2) عين  $v_0$  حتى تكون ( $v_n$ ) متتالية ثابتة.

3) نفرض أن  $v_0 = 3$  ونضع  $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + \alpha}$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي

موجب. أ) عين قيمة  $\alpha$  حتى تكون ( $u_n$ ) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول  $u_0$ .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n \neq 1$ .

ج) نفرض أن  $\alpha = 1$ . أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$

## - النتائج :

1) نستعمل البرهان بالتراجع. 2) تكون ( $v_n$ ) ثابتة إذا كان  $\alpha = 2$

3- أ) تكون المتتالية ( $u_n$ ) هندسية إذا كان  $\alpha = 1$  ويكون أساسها

$q = \frac{1}{2}$  و حدها الأول  $u_0 = \frac{1}{4}$ .

ب)  $u_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}$  ،  $v_n = -1 - \frac{3}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} - 1}$



## تمارين مقترحة للحل

### تمرين 01

متتالية حسابية متزايدة حيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 14 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 94 \end{cases}$$

(1) عين  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(2) احسب:  $S_n = u_4 + u_5 + \dots + u_{2007}$ .

### تمرين 02

$a, b, c$  بهذا الترتيب تشكل 3 حدود متعاقبة لمتتالية حسابية.

$\frac{1}{a}, \frac{2}{b}, \frac{3}{c}$  بهذا الترتيب تشكل 3 حدود متعاقبة لمتتالية هندسية.

- احسب  $a, b, c$  علما أن:  $a + b + c = 9$ .

### تمرين 03

(I) متتالية عددية متزايدة حيث:  $u_3 = 17$  و  $u_7 = 33$

و تحقق:  $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير

معدوم. (1) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها.

(2) اكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(II) متتالية حسابية حدها الأول  $v_0$  و أساسها  $r$ .



Scanned by: Mekkaoui Ayoub  
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr



$S_n$  هو مجموع  $n$  حد الأولى لهذه المتتالية حيث:  $S_n = 2n^2 + 3n$  - احسب  $v_0$  و الأساس  $r$  - عين عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ .

### تمرين 04

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 4u_{n+1} - 2u_n = 9 \end{cases}$   
 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة كما يلي:  $v_n = 2u_n - 9$

(1) احسب  $u_1, u_2, u_3$  ثم  $v_1, v_2, v_3$  (2) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها (3) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  (4) احسب المجاميع الآتية:

$$S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n, \quad S_2 = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2, \\ S_3 = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad S_4 = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

### تمرين 05

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة بـ  $u_n = 4n + 3$

(1) بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.  
 (2) هل العددين 2003 و 2426 حدان من هذه المتتالية ؟  
 (3) ما قيمة و رتبة الحد الذي نبدأ به حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعة من هذه المتتالية مساويا لـ 1620 ؟ (4) عين أصغر عدد طبيعي  $n$  حتى يكون  $u_n > 8003$

(5) احسب الجداء  $P_n = 3^3 \times 3^7 \times 3^{11} \times \dots \times 3^{4n+3}$

### تمرين 06

نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي:  $\begin{cases} v_1 = 20, v_0 = 1 \\ v_{n+2} = 8v_{n+1} - 16v_n \end{cases}$

(1) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\alpha_n = \frac{v_n}{4^n}$

أ- بين أن  $(\alpha_n)$  هي متتالية حسابية محدد أساسها و حدها الأول.  
 ب - احسب  $\alpha_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$ .  
 (2) نعتبر المجموع  $S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  . عين العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $S_n = 190$

### تمرين 07

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $u_0 = \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي والعلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = \sqrt{7u_n - 10}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .  
 (1) عين  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  ثابتة. (2) نضع  $\alpha = 3$  . أ - أثبت أن  $2 < u_n < 5$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  . ب - أثبت أن  $(u_n)$  متزايدة تماما . (3) نضع  $\alpha = 6$  ، أثبت أن  $u_n > 5$  ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  و استنتج تغيرات  $(u_n)$  .

### تمرين 08

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = -1$  و العلاقة التراجعية

$$3u_{n+1} = u_n + 8n + 14 \text{ . اـ احسب } u_3, u_2, u_1 \text{ .}$$

ب- لتكن  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ  $v_n = u_n + \alpha n + \beta$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان . عين  $\alpha$

و  $\beta$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية ثم عين أساسها و حدها الأول .

ج- اكتب عبارة  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  . (2) احسب المجاميع الآتية :

$$\alpha_n = v_0 + 3v_1 + 3v_2 + \dots + 3^n v_n, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

### تمرين 09

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $u_1 = \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي غير

معدوم والعلاقة التراجعية:  $3u_{n+1} = 2u_n + 4$  من أجل كل عدد طبيعي

$n$  (1) عين  $\alpha$  حتى تكون  $(u_n)$  ثابتة . (2) نضع  $\alpha < 4$  .

ا- أثبت أنه من أجل كل عدد  $n$  غير معدوم فإن  $u_n < 4$  .

ب- أدرس اتجاه تغيرات  $(u_n)$  ، ماذا تستنتج ؟ (3)  $(v_n)$  متتالية

عددية معرفة بـ :  $v_n = \frac{1}{2}u_n - \beta$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير

معدوم ( $\beta$  عدد حقيقي) . أ- عين  $\beta$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية،

عين أساسها . ب- احسب  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  و  $\alpha$  .

نضع  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  . عين  $\alpha$  حتى تكون  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 9$  .

### تمرين 10

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة بحدها الأول  $v_0$  و بالعلاقة التراجعية

$$1 \cdot v_{n+1} = \frac{4}{4 - v_n} \text{ حدد قيمة } v_0 \text{ حتى تكون المتتالية } (v_n) \text{ ثابتة .}$$

(2) برهن أنه إذا كان  $v_0 < 2$  فإن  $v_n < 2$  مهما يكن العدد الطبيعي  $n$

و أن  $(v_n)$  متتالية رتيبة . (3) نضع  $v_0 = 1$  . اـ احسب  $v_3, v_2, v_1$  .

ب- نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بحدها العام  $u_n = \frac{1}{v_n - 2}$  .

برهن أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ج- اكتب  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$  . (د) احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

### تمرين 11

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) برهن بالتراجع أن  $0 \leq u_n < 1$  مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  ، ثم

استنتج أن  $(u_n)$  متزايدة تماما . - لتكن  $f$  دالة عددية حيث :

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ . عين العدد الحقيقي } \alpha \text{ بحيث } f(\alpha) = \alpha$$

(2)  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة بـ :  $v_n = u_n - \alpha$  .



أ- أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج - احسب المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و استنتج

د- احسب :  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

## تمرين 12

(I) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 2 & ; 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 2\alpha v_n + 3 \end{cases}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $v_n > 0$  .

(II) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :

$$u_n = v_n + \frac{3}{2\alpha - 1}$$

(1) برهن أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(2) عبر عن  $u_n$  بدلالة  $\alpha$  و  $n$  ثم استنتج عبارة  $v_n$  بدلالة  $\alpha$  و  $n$  .

(3) احسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  .

(4) نفرض أن  $\alpha = \frac{1}{4}$  احسب  $S_n = v_{10} + v_{11} + \dots + v_{2n}$  .

## تمرين 13

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = -1$  و  $u_1 = 2$

و  $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4u_{n-1})$  حيث  $n \geq 1$  .

(1) احسب  $u_2$  و  $u_3$  . (2) لتكن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتتالية العددية المعرفة كمل

يلي :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  . أ- احسب  $v_0$  ،  $v_1$  ،  $v_2$  .

ب- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ثم عين أساسها و حدها الأول .

ج - احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  . د - نضع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، احسب  $S_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلال

$n$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

## تمرين 14

نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + n - 1, v_0 = 1$$

لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة كما يلي :  $u_n = 4v_n - 6n + 15$  .

(1) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية . (2) احسب  $u_0$  ثم أكتب عبارة

$u_n$  بدلالة  $n$  و استنتج أن  $v_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$  من أجل كل

عدد طبيعي  $n$  .

(1) بين أن  $u_n \geq 0$  لكل عدد طبيعي  $n$ .

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(3) برهن أن  $(u_n)$  متقاربة.

(4) بين أن  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### تمرين 17

لتكن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $v_0 = e^3 - 1$  ومهما يكن

العدد الطبيعي  $n$  فإن  $v_{n+1} = 1 - e^3 + v_n$ .

(1) أ- احسب  $v_1, v_2, v$ . ب- أثبت أن  $1 + v_n > 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ . ج- بين أن  $(v_n)$  متناقصة تماما.

(2)  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $\alpha_n = 2(1 + v_n)$ .

أبين أن  $(\alpha_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- احسب  $\alpha_n$  بدلالة  $n$ . ج- نضع  $S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  (3). عين  $n$  حتى يكون  $S_n = 2 \times 10^{-9}$  ( يعطى

$\log 10 = 2,3$ ).

### تمرين 18

(1) لتكن المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0$  و العلاقة التراجعية

$u_{n+1} = 1,05u_n + 1000$ . نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ :

(3) بين أن المتتالية  $(v_n)$  يمكن كتابتها على الشكل

$V_n = \alpha_n + \beta_n$  حيث  $(\alpha_n)$  متتالية هندسية و  $(\beta_n)$  متتالية حسابية.

(4) احسب  $S'_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  ،  $S''_n = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n$

و استنتج عبارة  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

### تمرين 15

لتكن  $(u_n)$  متتالية حقيقية معرفة كما يلي :  $u_0 = 2$

و  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$  (1) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

(2) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 8 . (3) استنتج

أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ثم أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (4) لتكن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

متتالية عددية معرفة كما يلي :  $v_n = u_n + \alpha$  حيث  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

أ- عين قيمة  $\alpha$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية . ب- احسب  $v_n$

بدلالة  $n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ . ج- احسب  $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

و  $S_2 = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

### تمرين 16

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن

أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب  $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{1 + u_n^2}$



1.  $v_n = u_n + 2000$  - ا- برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية

هندسية يطلب تعيين أساسها . ب- احسب  $v_n$  بدلالة  $v_0$  و  $n$  و استنتج  
 $u_n$  بدلالة  $u_0$  و  $n$  . ج- احسب المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$   
 (2) في 1 جانفي 1978 عدد سكان مدينة هو 20000 ساكنا ، كل عام  
 يزداد عدد سكان هذه المدينة بـ 5% ، ضافة إلى 1000 شخص يأتون  
 للإقامة بها بصفة نهائية . أ- عين عدد السكان في 1 جانفي 1983 .  
 ب- عدد التلاميذ في الطور الابتدائي يمثل 20% من عدد السكان ، إذا  
 خصصنا معلما لكل 40 تلميذا، ما هو عدد المعلمين في 1 جانفي 1983؟

## تمرين 19

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي:  $u_0 = \frac{1}{2}$  ،

$$1. u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \text{ احسب } u_1, u_2 .$$

(2) أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n > 0$  .

ب- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n - 1 < 0$  .

(3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تاما .

$$(4) \text{ لتكن } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة بـ : } v_n = \frac{1-u_n}{u_n} .$$

(1) أ- برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هي متتالية هندسية يطلب تعيين

أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  . ب- احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$   
 بدلالة  $n$  .

## تمرين 20

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي:  $u_0 = \frac{1}{4}$  ،

$$1. u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n \text{ احسب } u_1, u_2 .$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $0 \leq u_n < \frac{1}{4}$  .

(2) بين أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$  .

$$\text{ب- استنتج أن: } u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

(4) حدد نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

## تمرين 21

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي:  $u_0 = \frac{1}{2}$  ،

$$1. u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد}$$

طبيعي  $n$  فإن  $u_n > 0$  (2) نضع  $v_n = \frac{-1+u_n}{1+u_n}$  . أوجد العلاقة

بين  $v_{n+1}$  و  $v_n$  . استنتج نهاية  $v_n$  لما  $n$  تؤول إلى  $+\infty$  ثم نهاية  $u_n$  لما  $n$  تؤول إلى  $+\infty$  ثم نهاية .

## تمرين 22

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفتين كما يلي:

$$u_1 = 1 \text{ و } v_1 = 1 \text{ و } 3u_n - v_{n-1} = \frac{2-n}{n-1} \text{ و } u_n - v_n = -1 + \frac{1}{n} \text{ من أجل } n \geq 2$$

(1) أ- احسب  $u_2$  و  $v_2$  . ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  . ج- احسب  $u_n$  ثم  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(2) أ- أثبت أن  $u_n \leq \frac{1}{n}$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$

(استعمل البرهان بالتراجع) . ب- بين أن  $1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$  من أجل

كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  . ج- استنتج أن المتتالية  $(v_n)$  متقاربة و حدد نهايتها .

(3) احسب الجداء  $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$  ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$  .

## تمرين 23

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بحددها الأول  $u_0$  و العلاقة

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n} \text{ التراجعية}$$

(I) نفرض أن  $u_0 = 4$  (1) احسب  $u_1$  ،  $u_2$  (2) بين بالتراجع أن  $(u_n)$  ثابتة .

(II) نفرض فيما يلي أن  $u_0 = 1$  و نضع  $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$  لكل عدد

طبيعي  $n$  (1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها .

(2) بين أن  $(v_n)$  متقاربة و احسب نهايتها .

(3) احسب  $S_n = v_5 + v_6 + \dots + v_{n+5}$  .

## تمرين 24

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} \end{cases}$$

(1) نعرف متتالية جديدة  $(v_n)$  بـ:  $v_n = u_n + \alpha n - 1$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$

و  $n \in \mathbb{N}$  . أ- أوجد العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية

ب- في هذه الحالة احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  .

(2) نضع  $v_n = u_n + 3n - 1$  . احسب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) أ- احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  .

ب- احسب نهاية  $S_n$  لما تؤول  $n$  إلى  $+\infty$  .

(4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .



## تمرين 25

( $v_n$ ) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول  $v_0$  و أساسها  $r$ .

$$(1) \text{ عين } v_2 \text{ و } r \text{ علما أن : } \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 210 \end{cases}$$

(2) أ- استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ . ب- احسب  $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

(3) نعتبر المتتالية ( $u_n$ ) $_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :  $u_n = e^{14-3n}$

أ- بين أن المتتالية ( $u_n$ ) هندسية يطلب تعيين أساسها . ب- احسب

المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و الجداء

$$\pi_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

ب- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n$ .

## تمرين 26

لتكن المتتالية العددية ( $u_n$ ) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = \alpha \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم } 3u_{n+1} = 2u_n - 4$$

(1) عين قيمة  $\alpha$  حتى تكون المتتالية ( $u_n$ ) ثابتة .

(2) نفرض أن  $\alpha > -4$ .

أ) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم فإن :  $u_n > -4$

ب) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية ( $u_n$ ) .

(3) نفرض في ما يأتي أن  $\alpha = 2$

نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم

ب- :  $v_n = \frac{1}{2}u_n + 2$  . أ) برهن أن المتتالية ( $v_n$ ) هي متتالية

هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج) احسب المجموع :  $S_n = u_4 + u_5 + \dots + u_{n-3}$ .

## تمرين 27

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بحدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد

طبيعي  $n$  بالعلاقة التراجعية :  $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$  حيث

$\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين ( $\alpha \neq 0$ ) .

(1) عين  $\alpha$  حتى تكون ( $u_n$ ) حسابية ثم احسب  $u_n$  بدلالة  $n$  و  $\beta$

(2) ( $v_n$ ) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

ب- :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  . أ) بين أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية ثم احسب  $S_n$

حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$  واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $\alpha, \beta, n$

(2) عين قيم  $\alpha$  حتى تكون ( $u_n$ ) متقاربة . (3) نضع  $\alpha = \frac{1}{2}$  و  $\beta = 1$

- احسب :  $\pi_n = u_0 + 2u_1 + 2^2u_2 + \dots + 2^{n-1}u_{n-1}$ .

## تمرين 28

نعتبر المتتالية ( $u_n$ ) المعرفة في  $\mathbb{N}$  ب- :  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد

طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n$  . (1) احسب  $u_1, u_2$ .

2- (أ) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n \geq n$

(ب) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 4n + 8$

(أ) أحسب  $v_0, v_1$  . (ب) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية.

(ج) أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$  . (4) أحسب :  $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$S_2 = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad \pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

## تمرين 29

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = \frac{1}{4}$  وبالعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} \quad \text{التراجعية :}$$

1- (أ) عين العددين الحقيقيين  $a, b$  بحيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4} \quad \text{(ب) باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن}$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-2 < u_n < 1$  .

(ج) استنتج اتجاه تغيرات المتتالية  $(u_n)$  .

(2) لتكن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي :  $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

(أ) أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

(ب) عين عبارتي  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$

## تمرين 30

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = 10$  ومن أجل

$$u_{n+1} = \frac{9u_n - 49}{u_n - 5} \quad \text{كل عدد طبيعي } n$$

(1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 7$  .

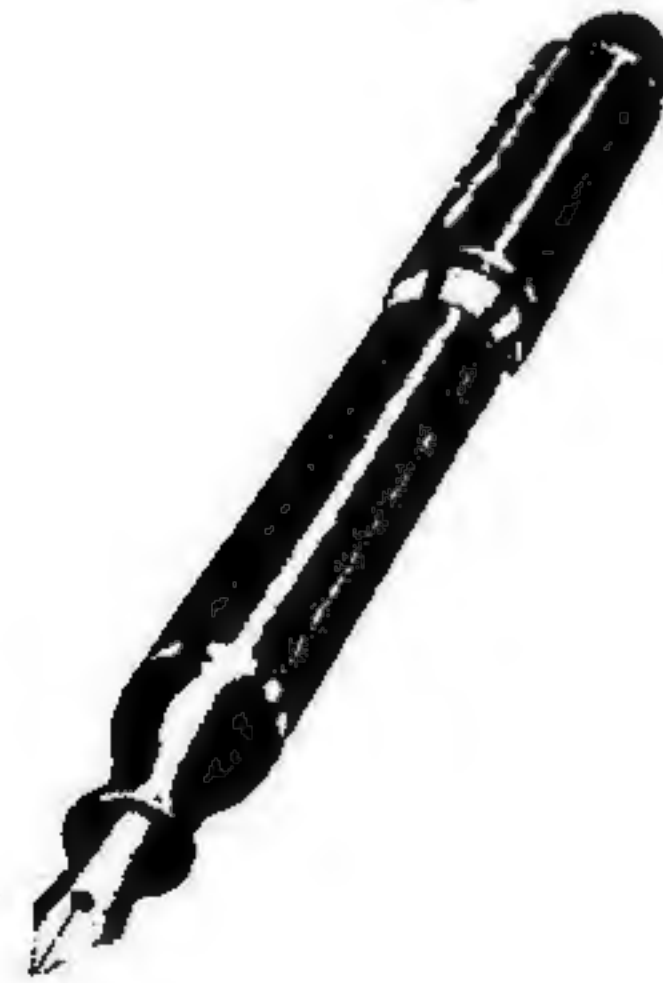
(2) لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 7} \quad \text{(أ) بين أن } (v_n) \text{ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها}$$

(ب) أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

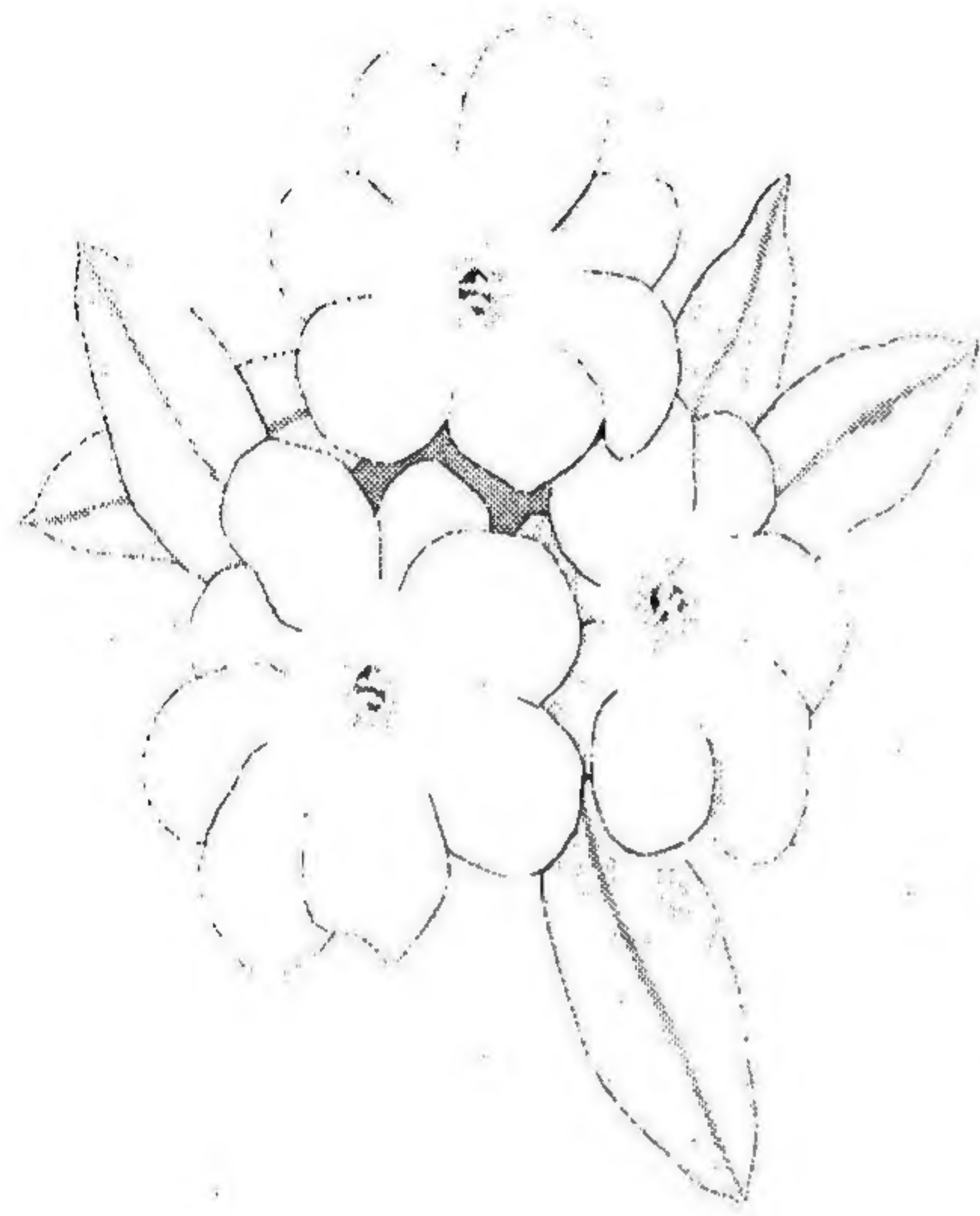
(ج) أوجد قيمة  $n$  حتى تكون  $u_n = \frac{115}{16}$

(3) أحسب :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



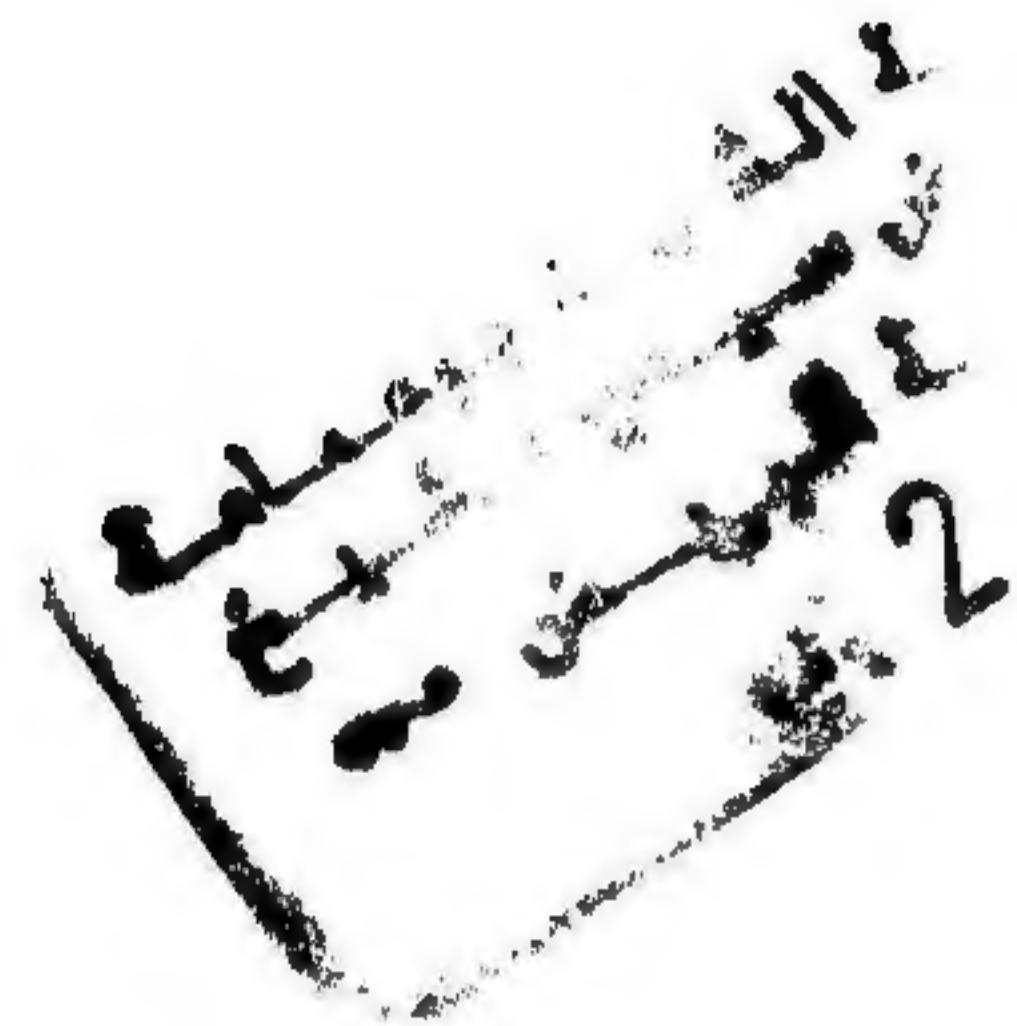






ثوبه اخرج لي صدري و يخر لي امري و احل عقد من لساني  
بفكموا قولي



بالتوفيق إن شاء الله  
في البكالوريا

## الفهرس

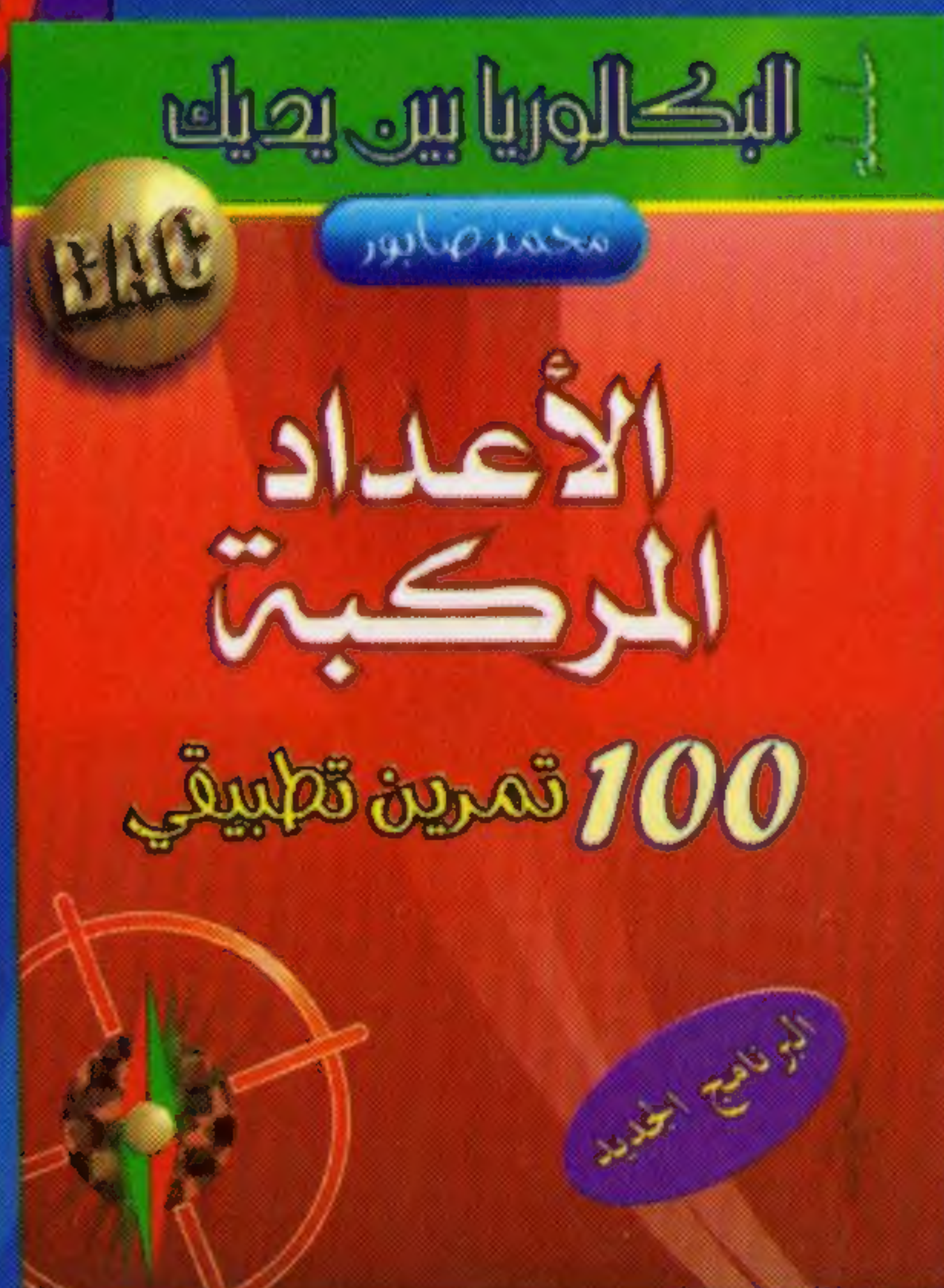
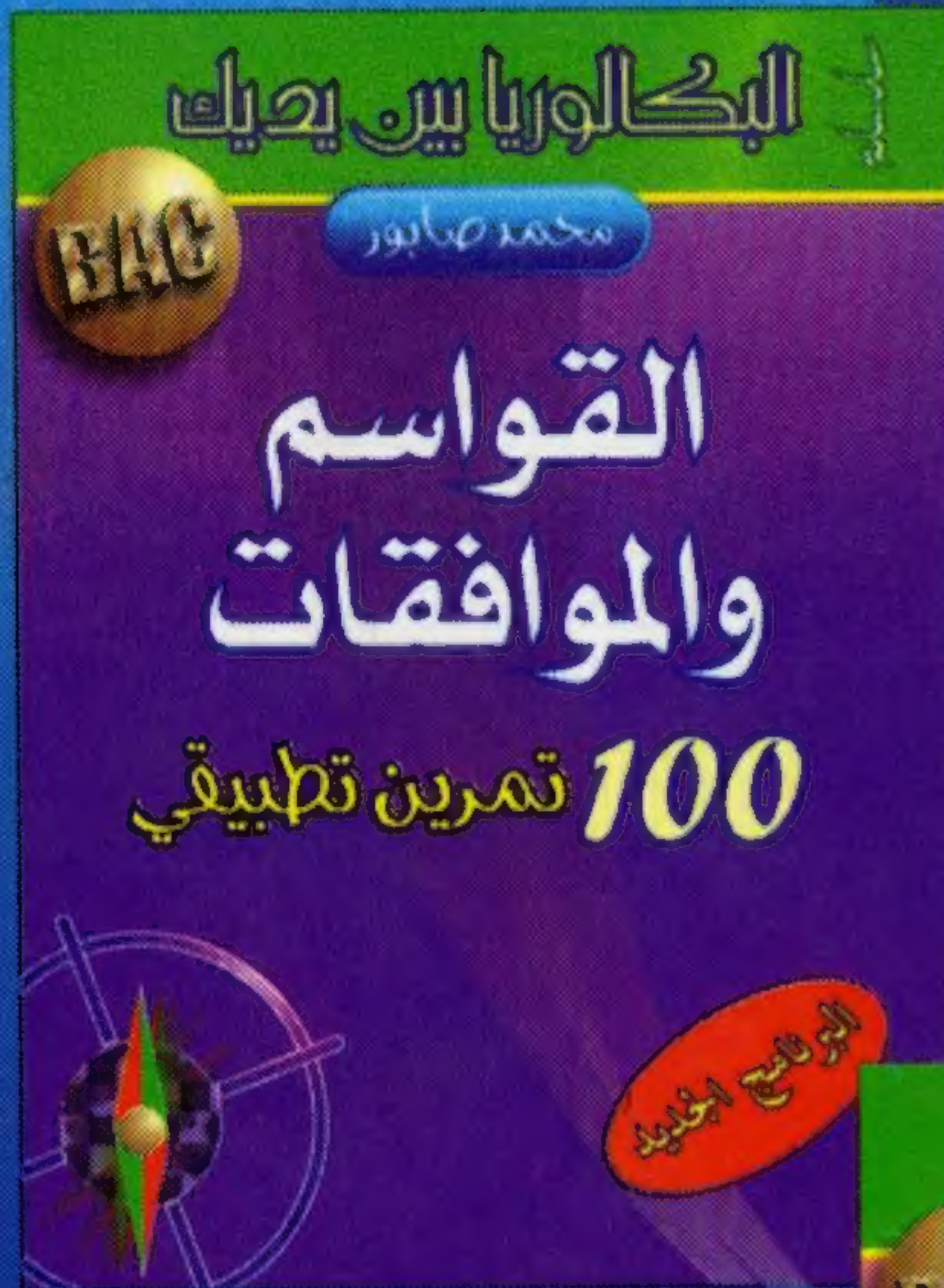


- 5..... الملخص 
- 9..... تمارين محلولة 
- 71..... تمارين مرفقة بالحل 
- 101..... تمارين مقترحة للحل 
- 120 ..... الفهرس •

Scanned by: Mekkaoui Ayoub  
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr



# في نفس السلسلة



ISBN : 978-9947-0-1865-1

Scanned by: Mekkaoui Ayoub  
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr